С.Л.Шитлин

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ [1]

Abstract

Исследуется задача приближенного интегрирования по отрезку $[0,1]$ функции из пространства L с нормой

$$\|\varphi\|_L = \left(\int \sum_{\alpha=0}^{m} a_{2\alpha} \left(D^{\alpha}\varphi\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

с помощью квадратурной формулы с равномерным расположением узлов. Качество формулы определяется нормой функционала погрешности в сопряженном пространстве L^*. Получены выражения для коэффициентов оптимальной формулы через корни некоторого многочлена - аналога многочлена Эйлера.

1. Постановка задачи

Рассматривается квадратурная формула

$$h \sum_{k=0}^{2N+1} c_k f\left(x_k\right)$$

на равномерной сетке

$$\left\{x_k = kh,\ k = 0...2N+1,\ h = 1/\left(2N+1\right)\right\}$$

для приближения интеграла от функции $f\left(x\right)$, заданной на отрезке $[0,1]$:

$$\int\limits_0^1 f\left(x\right) dx$$

(четное число узлов введено лишь с целью упрощения дальнейших выкладок; в случае нечетного числа узлов получаются аналогичные результаты).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 99-01-00799.

Введем функционал погрешности l квадратурной формулы [1]:

$$\langle l, \varphi \rangle = \int\limits_0^1 f(x)\, dx - h \sum_{k=0}^{2N+1} c_k f(x_k),$$

$$l(x) = \chi_{[0,1]}(x) - h \sum_{k=0}^{2N+1} c_k \delta(x - x_k).$$

Рассмотрим пространство L функций, заданных на вещественной прямой, имеющих $m \geq 1$ обобщенных производных, интегрируемых с квадратом. Введем в L скалярное произведение следующим образом:

$$(\varphi, \psi)_L = \int \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha D^\alpha \varphi D^\alpha \psi dx. \tag{1}$$

Здесь постоянные a_α подобраны таким образом, чтобы (1) действительно было скалярным произведением. Ограничимся только рассмотрением случая, когда $a_0 > 0$. Для упрощения записи положим $a_m = 1$.

Оптимальной назовем формулу, на которой достигается минимум функционала погрешности:

$$\inf_{\{c_k\}} \|l\|_{L^*} = \|l^*\|_{L^*}.$$

Случай $a_0 = a_1 = ... = a_{m-1} = 0$ был подробно исследован С.Л.Соболевым и его учениками (см. [1-3]). Нашей целью будет являться разработка эффективного алгоритма поиска оптимальных коэффициентов $\{c_k\}$ при произвольных a_α.

2. Сведение задачи к системе линейных уравнений

Приведем несколько простых утверждений без доказательства.

Утверждение 1. *Предположим, $l \in L^*$. Тогда $\exists\ \psi_l \in L$:*

$$\langle l, \varphi \rangle = (\psi_l, \varphi)_L,\ \forall \varphi \in L,$$

$$\|l\|^2_{L^*} = \langle l, \psi_l \rangle,$$

причем ψ_l является решением уравнения:

$$\sum_{\alpha=0}^{m} (-1)^\alpha a_\alpha D^{2\alpha} \psi_l = l(x). \tag{2}$$

Понятно, что

$$\psi_l = G * l,$$

где G - фундаментальное решение уравнения (2).

Утверждение 2. *Фундаментальные решения уравнения (2) задаются следующим образом (см. [4], стр. 190):*

$$G(x) = G_1(x) + \varphi(x),$$

$$G_1(x) = (-1)^m \theta(x) Z(x),$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1/2, & x \geq 0, \\ -1/2, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &(-1)^m a_m Z^{(2m)}(x) + ... + (-1)^k a_k Z^{(2k)}(x) + ... + a_0 Z(x) = 0, \\ &Z(0) = Z'(0) = ... = Z^{(2m-2)}(0) = 0, \ Z^{(2m-1)}(0) = 1, \end{aligned} \tag{3}$$

а $\varphi(x)$ -любое решение однородного уравнения (3).

Утверждение 3. *Для того, чтобы $\psi_l \in L$, необходимо выбрать функцию $G(x)$ таким образом, чтобы она убывала к нулю на бесконечности вместе со своими производными до порядка m включительно. Такими свойствами обладает*

$$G(x) = G_1(x) + G_2(x),$$

$$G_1(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j \left(e^{\lambda_j |x|} - e^{-\lambda_j |x|}\right), \ G_2(x) = -\sum_{j=1}^{m} b_j \left(e^{\lambda_j x} + e^{-\lambda_j x}\right).$$

Здесь b_j - заданные комплексные числа, а набор $\{\lambda_j, -\lambda_j\}_{j=1}^m$ совпадает со множеством корней характеристического многочлена

$$\sum_{\alpha=0}^{m} (-1)^\alpha a_\alpha \lambda^{2\alpha} = 0,$$

причем $\Re e(\lambda_j) > 0$. (Рассматривается только случай, когда все λ_j, $j = 1, ..., m$ различны.)

$G(x)$ можно записать в другом виде:

$$G(x)=\begin{cases} -2\sum\limits_{j=1}^{m} b_j e^{-\lambda_j x},\ x\geq 0, \\ -2\sum\limits_{j=1}^{m} b_j e^{\lambda_j x},\ x\leq 0. \end{cases}$$

Из утверждения 2. вытекает, что функция $G(x)$ является четной, поэтому имеет место

Утверждение 4. *Коэффициенты c_k оптимальной квадратурной формулы симметричны относительно середины отрезка $[0,1]$, а именно выполнены соотношения:*

$$c_k=c_{2N+1-k},\ k=0,1,...,N.$$

Следует заметить, что согласно постановке задачи мы можем рассматривать только такие наборы $\{c_k\}$, для которых функционал погрешности $l\in L^*$.

Так как $L\subset C$, то $l\in L^*$ при любом выборе коэффициентов квадратурной формулы c_k.

Утверждение 5. *Предположим, $G(x)$ выбрано указанным выше образом. Тогда*

$$\|l\|_{L^*}^2=h^2\sum_{k=0}^{2N+1}\sum_{k'=0}^{2N+1}c_k c_{k'}G(x_k-x_{k'})-$$
$$-2h\sum_{k=0}^{2N+1}c_k\int_0^1 G(x-x_k)\,dx+\int_0^1\int_0^1 G(x-y)\,dxdy.$$

Доказательство. Рассуждения проводятся аналогично тому, как это сделано в [1] для пространства $L_2^{(m)}$. Согласно утверждению 2.

$$\|l\|_{L^*}^2=\langle l,\psi_l\rangle=\langle l,l*G\rangle,$$

$$l*G=\int_0^1 G(x-y)\,dy-\sum_{k=0}^{2N+1}c_k G(x-x_k),$$
$$\langle l,l*G\rangle=\left\langle \chi_{[0,1]}-\sum_{k=0}^{2N+1}c_k\delta(x-x_k),\right.$$
$$\left.\int_0^1 G(x-y)\,dy-\sum_{k=0}^{2N+1}c_k G(x-x_k)\right\rangle=$$
$$=\int_0^1\int_0^1 G(x-y)\,dydx-\sum_{k=0}^{2N+1}c_k\int_0^1 G(x_k-y)\,dy-$$
$$-\int_0^1\sum_{k=0}^{2N+1}c_k G(x-x_k)\,dx-\sum_{k=0}^{2N+1}\sum_{k'=0}^{2N+1}c_k c_{k'}G(x_{k'}-x_k).$$

В силу четности функции G получаем искомое равенство.

Утверждение 2. доказано.

Из утверждения 2. следует, что $\|l\|^2_{L^*}$ является квадратичным функционалом относительно $\{c_k\}$. Набор коэффициентов $\{c_k\}$ оптимальной квадратурной формулы должен доставлять минимум этому функционалу. Исходя из этого получаем систему уравнений для определения оптимальных коэффициентов c_k:

$$
\begin{aligned}
&h \sum_{k=0}^{2N+1} c_k G\left(hs - hk\right) = \int_0^1 G\left(y - hs\right) dy, \\
&s = 0, 1, ..., 2N+1.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Пользуясь симметричностью оптимальных коэффициентов относительно середины отрезка $[0,1]$, перепишем систему (4).

Утверждение 6. *Оптимальные коэффициенты* $\{c_k\}_{k=0}^N$ *удовлетворяют системе линейных уравнений*

$$
\begin{aligned}
&h \sum_{k=0}^{N} c_k \left(G\left(hs - hk\right) + G\left(1 - hs - hk\right)\right) = \\
&= \int_0^1 G\left(y - hs\right) dy, \ \ s = 0, 1, ..., N.
\end{aligned} \tag{5}
$$

3. Формулы для оптимальных коэффициентов

Введем

$$d_k = c_k - 1$$

и перепишем систему (5) в терминах d_k:

$$
\begin{aligned}
&h \sum_{k=0}^{N} d_k \left(G\left(hs - hk\right) + G\left(1 - hs - hk\right)\right) = \\
&= \int_0^1 G\left(y - hs\right) dy - h \sum_{k=0}^{N} \left(G\left(hs - hk\right) + G\left(1 - hs - hk\right)\right), \\
&s = 0, ..., N.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Учитывая вид $G\left(y\right)$, правая часть (6) вычисляется явно. После несложных преобразований систему уравнений (6) перепишем в виде:

$$
\begin{aligned}
&h\sum_{k=0}^{N} d_k\left(G\left(hs-hk\right)+G\left(1-hs-hk\right)\right)=\\
&=\sum_{j=1}^{m} b_j\left(e^{\lambda_j hs}+e^{\lambda_j(1-hs)}\right)\left(\tfrac{2e^{-\lambda_j}}{\lambda_j}+he^{-\lambda_j}+\right.\\
&\left.+he^{-\lambda_j}\left(\tfrac{1}{e^{-\lambda_j h}-1}-\tfrac{1}{e^{\lambda_j h}-1}\right)\right)-\\
&-2\sum_{j=1}^{m} b_j\left(\tfrac{1}{\lambda_j}-\tfrac{h}{e^{\lambda_j h}-1}+\tfrac{1}{\lambda_j}+\tfrac{h}{e^{-\lambda_j h}-1}\right),\\
&s=0,...,N.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Покажем, что можно построить разностный оператор D_p*, действующий на функцию $c\left(hs\right)$ по правилу:

$$
\left(D_p*c\right)\left(hs\right)=\sum_{i=0}^{2m+1} f_i c\left(hs+hi\right)
$$

и обладающий свойствами:

$$
\begin{aligned}
&D_p*e^{-\lambda_j hs}\equiv 0,\ j=1,...,m,\\
&D_p*e^{\lambda_j hs}\equiv 0,\ j=1,...,m,\\
&D_p*1\equiv 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Действительно, уравнения (8) можно переписать в виде:

$$
\begin{aligned}
&e^{-\lambda_j hs}\sum_{i=0}^{2m+1} f_i e^{-\lambda_j hi}=0,\ j=1,...,m,\\
&e^{\lambda_j hs}\sum_{i=0}^{2m+1} f_i e^{\lambda_j hi}=0,\ j=1,...,m,\\
&\sum_{i=0}^{2m+1} f_i=0.
\end{aligned}
$$

Сокращая первую группу равенств на $e^{-\lambda_j hs}$, вторую - на $e^{\lambda_j hs}$, получаем однородную систему $2m+1$ линейных уравнений относительно $2m+2$ неизвестных. Положив $f_0=1$, получим систему с матрицей Вандермонда, которая имеет единственное решение. Таким образом, оператор D_p* построен (он определен с точностью до постоянного множителя).

Подействуем оператором D_p* на группу уравнений (7). Нетрудно видеть, что в результате мы получим:

$$
\sum_{k=1}^{2m} d_{k+s}u_k=0,\ s=0,...,N-2m. \tag{9}
$$

Здесь

$$u_k = \sum_{i=0}^{2m+1} f_i G_1 \left(h \left(i-k\right)\right). \tag{10}$$

К уравнениям (9) следует добавить $2m$ уравнений из системы (7) при $s = N-2m+1, ..., N$. В результате мы получили систему, эквивалентную исходной.

Из вида u_k (10), а также свойств оператора D_p* (8) нетрудно доказать, что

$$u_k = -u_{2m+1-k}, \;\; k = 1, 2, ..., m. \tag{11}$$

Общее решение системы уравнений (9) легко выписать

$$d_k \left(h\right) = y_0 \left(h\right) + \sum_{r=1}^{2m-2} y_r \left(h\right) \mu_r^k, \;\; k = 1, ..., N. \tag{12}$$

Здесь μ_r - корни характеристического многочлена

$$\mu^{2m-1} u_{2m} + \mu^{2m-2} u_{2m-1} + ... + u_1 = 0. \tag{13}$$

Из (11) вытекает, что $\mu_0 = 1$ - корень уравнения (13). Кроме того, остальные корни можно объединить в пары, удовлетворяющие соотношению:

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_{2m-1-r}}, \;\; r = 1, ..., m-1.$$

Можно показать, что при достаточно малых h из корней $\mu_1, ..., \mu_{2m-2}$ ровно половина будет по модулю строго меньше единицы. Перенумеруем μ_r таким образом, чтобы таковыми оказались $\mu_1, ..., \mu_{m-1}$.

4. Приближенное решение задачи

Таким образом, мы свели исходную задачу к поиску $y_0 \left(h\right), ..., y_{2m-2} \left(h\right)$, $d_0 \left(h\right)$ (заметим, что d_0 не входит в систему (9), поэтому остается свободным параметром). Соответствующую линейную систему можно получить, подставив (12) в (6). Условимся в дальнейшем называть величины порядка $h^d \mu_r^{-1/h}$ экспоненциально малыми, где μ_r - корни многочлена (13), строго меньшие по модулю еденицы, а d - некоторая постоянная, не зависящая от h.

Теорема. *С точностью до экспоненциально малых членов коэффициенты оптимальных формул при достаточно малых h представимы в виде*

$$c_k(h) = 1 + y_0(h) + \sum_{r=1}^{m-1} y_r(h)\,\mu_r^k,\ k = 1, ..., N,$$

где μ_r, $r = 1, ..., m-1$ - по модулю строго меньшие единицы корни многочлена (13), $y_r(h)$, $r = 0, ..., m-1$, $d_0(h)$ находятся как решения линейной системы уравнений.

Доказательство. Будем искать решение в виде (напомним, что $c_k = 1 + d_k$):

$$\begin{aligned} &d_k(h) = \delta_k + y_0(h) + \sum_{r=1}^{m-1} y_r(h)\,\mu_r^k,\ k = 1, ..., N, \\ &|\mu_r| < 1,\ r = 1, ..., m-1. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставим (14) в (7). После несложных преобразований получим, что (7) может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned} &h\sum_{j=1}^{m} b_j\left(e^{\lambda_j hs} + e^{\lambda_j(1-hs)}\right)\left(-2e^{-\lambda_j}d_0 + \sum_{r=1}^{m-1}\frac{2\mu_r e^{\lambda_j h}e^{-\lambda_j}}{\mu_r e^{\lambda_j h}-1}y_r + \right.\\ &\left.+2e^{-\lambda_j}\frac{e^{\lambda_j h}}{e^{\lambda_j h}-1}y_0\right) - 2h\sum_{j=1}^{m} b_j\frac{e^{\lambda_j h}+1}{e^{\lambda_j h}-1}y_0 + h\sum_{k=0}^{2N+1}\delta_k G(h(k-s)) = \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_j\left(e^{\lambda_j hs} + e^{\lambda_j(1-hs)}\right)\left(\frac{2e^{-\lambda_j}}{\lambda_j} + he^{-\lambda_j} + \right.\\ &\left.+he^{-\lambda_j}\left(\frac{1}{e^{-\lambda_j h}-1} - \frac{1}{e^{\lambda_j h}-1}\right)\right) - \\ &-2\sum_{j=1}^{m} b_j\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{h}{e^{\lambda_j h}-1} + \frac{1}{\lambda_j} + \frac{h}{e^{-\lambda_j h}-1}\right) + \varepsilon_1(s), \\ &s = 0, 1, ..., N. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь

$$\varepsilon_1(s) = O\left(\tilde{\mu}^{-1/h}\right),\ \tilde{\mu} = \max_{|\mu_r|<1}|\mu_r|.$$

Пусть δ_k является решением системы уравнений:

$$\begin{aligned} &h\sum_{k=0}^{2N+1}\delta_k G(h(k-s)) = \varepsilon_1(s), \\ &s = 0, ..., 2N+1,\ \delta_{2N+1-k} = \delta_k. \end{aligned} \tag{16}$$

Тогда система (15) будет удовлетворена при любом s, если приравнять коэффициенты при $e^{\lambda_j hs} + e^{\lambda_j(1-hs)}$, а также при свободном члене (проанализировав (15), нетрудно убедиться, что это можно сделать). Приравнивание коэффициентов при свободном члене однозначно определяет y_0:

$$y_0(h) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} b_j\left(\left(\frac{1}{\lambda_j} - \frac{h}{e^{\lambda_j h}-1}\right) + \left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{h}{e^{-\lambda_j h}-1}\right)\right)}{h\sum\limits_{j=1}^{m} b_j\left(\frac{e^{\lambda_j h}+1}{e^{\lambda_j h}-1}\right)}.$$

Можно доказать, что

Утверждение 7. *Имеет место оценка*

$$y_0(h) = O\left(h^{2m}\right).$$

Приравняв коэффициенты при $e^{\lambda_j hs} + e^{\lambda_j(1-hs)}$, получим:

$$-hd_0 + hy_0\frac{e^{\lambda_j h}}{e^{\lambda_j h}-1} + h\sum_{r=1}^{m-1} y_r\frac{\mu_r e^{\lambda_j h}}{\mu_r e^{\lambda_j h}-1} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_j} - \frac{h}{e^{\lambda_j h}-1},\ j = 1, ..., m.$$

Итак, мы получили систему m уравнений относительно m неизвестных: $y_r,\ r = 1, ..., m-1$ и d_0.

Поделим каждое уравнение системы (16) на h. Обозначим матрицу полученной системы через

$$\Theta = \begin{pmatrix} G(0) & G(h) & G(2h) & ... & G((2N+1)h) \\ G(h) & G(0) & G(h) & ... & G(2Nh) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ G((2N+1)h) & G(2Nh) & G((2N-1)h) & ... & G(0) \end{pmatrix}.$$

Без доказательства приведем

Утверждение 8. *При достаточно малых h*

$$|\det(\Theta)| > Kh^{s(2N+2)},$$

где $K > 0$ и s - постоянные, не зависящие от h ($h = \frac{1}{2N+1}$).

Из утверждения 4. без труда получаем, что $\{\delta_k\}_{k=0}^{2N+1}$ - решение системы (16) является экспоненциально малой величиной. Действительно, поделив каждое уравнение системы (16) на h^{s+1}, получим систему с определителем равным K и с экспоненциально малой правой частью. Поэтому решение такой системы будет по порядку также экспоненциально малым.

Теорема доказана.

Литература

[1] **Соболев С.Л., Васкевич В.Л.** Кубатурные формулы. Новосибирск, ИМ СО РАН, 1996.

[2] **Загирова Ф.Я.** О построении оптимальных квадратурных формул с равноотстоящими узлами. Новосибирск, 1982. ИМ СО РАН, Препринт 25.

[3] **Шадиметов Х.М.** Оптимальные квадратурные формулы в $L_2^{(m)}(\Omega)$ и $L_2^{(m)}\left(R^1\right)$ // Докл. АН УзССР. 1983, N3. С. 5–8.

[4] **Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике, Москва, 1976.