А.И.Гребенников, А. Фрагела Кольяр

ПОСТАНОВКА И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАФИИ [1]

1. Введение

Изучение деятельности мозга человека с помощью электроэнцефалографии (ЭЭГ) основано на электрической активности нейронов, их структур и мозга в целом [1-4]. Современные постановки задач обработки данных электроэнцефалографических исследований включают следующие компоненты:

1) физическую модель функционирования головного мозга при изучаемом круге явлений;

2) математическую модель распространения электромагнитного поля;

3) геометрическую модель головного мозга и окружающей его среды;

4) численную модель;

5) программную и информационную компьютерную модель.

Под физической моделью понимается условно принятая совокупность определенным образом распределенных в мозге и окружающей его среде зарядов и (или) токов и создаваемых ими полей.

Математическая модель представляет собой уравнения и дополнительные (краевые, начальные и т.п.) условия, которым удовлетворяют электромагнитные поля в рамках принятой физической модели.

Геометрическая модель включает условно принятую форму и строение головного мозга и слоев окружающей ткани.

Численная модель состоит из дискретных аналогов уравнений математической модели, параметрического семейства алгоритмов их решения и правил выбора *параметров алгоритма* в зависимости от входных данных и требуемых характеристик искомого решения.

Компьютерная модель включает программные реализации алгоритмов численной модели, процедуры формирования и отображения входных и выходных (расчетных) данных, сервисные процедуры и т.п.

---

[1] Работа выполнена в рамках Программы Российско-Мексиканского сотрудничества Московского государственного университета и Заслуженного Независимого университета г. Пуэбла, Мексика, а также при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант N 98–01–00345) и ФНП "Университеты России – фундаментальные исследования" (грант N 5584).

В качестве физической модели функционирования головного мозга в большинстве случаев выбирается совокупность диполей, интенсивность излучения которых (дипольный момент), локализация и ориентация выбираются в зависимости от измеряемых с помощью электродов значений потенциала на скальпе. Этот выбор осуществляется в силу некоторого точностного критерия, как правило – метода наименьших квадратов или его регуляризованного аналога [5]. Этот подход оказался достаточно эффективным при решении ряда задач медицинской диагностики, в том числе для локализации электрической активности при эпилепсии, травмах, инсультах, опухолях [6-8].

Однако, часто при диагностике и исследованиях функционирования мозга необходимо более детальное знание распределения электромагнитного поля, описываемого более общей физической и, соответственно, математической моделями. Некоторые из таких подходов описаны в работах [9-10], в частности на основе дискретного распределения плотности токов [11-12], и приведены также описания их программных реализаций и применений.

В настоящей работе используется достаточно общая физическая модель, представляющая пространственное распределение потенциального поля, вызванное электрической активностью мозга. Математическая модель основана на теории потенциала и методе граничных интегральных уравнений [13-14]. Преимуществом такого подхода является возможность учета сложной геометрической модели и возможность расчета поля и его характеристик в произвольной точке рассматриваемой области. Обсуждаются математические модели, соответствующие различным краевым условиям.

В качестве численной модели, предложен сформулированный и обоснованный в работах [15-16] для класса операторных уравнений сплайн-аппроксимационный метод. Сплайн-аппроксимация используется также для численной реализации геометрической модели головы, представляющей систему областей, содержащих мозг и окружающие его (электрически активные) среды, и разделяющие их поверхности. Основной целью настоящей статьи является проведение анализа корректности (состоятельности) рассматриваемых математических моделей, что выполняется с помощью теоретического анализа и вычислительного эксперимента. При этом в вычислительном эксперименте используется простейшая геометрическая модель, что, тем не менее, не ограничивает общности выводов.

2. Геометрическая модель

Рассмотрим модель головы, занимающей в пространстве область Ω, состоящую из четырех областей: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{4} \Omega_i$, где:

1. Ω_1 – мозг (электрически активная область);
2. Ω_2 – цереброспинальная жидкость;
3. Ω_3 – череп;
4. Ω_4 – скальп;

с удельными электропроводностями σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 – соответственно мозга, цереброспинальной жидкости, черепа и скальпа. Каждая из областей Ω_i, $i = 2, 3, 4$, заключена между замкнутыми поверхностями S_{i-1}, S_i. Поверхность S_1 представляет поверхность коры головного мозга; вне поверхности скальпа S_4 находится воздух ($\sigma = 0$).

Выберем декартову систему координат, в качестве начала которой возьмем точку внутри области Ω_1. Предполагаем, что поверхности $S_i, i = 1, ..., 4$, обладают следующим свойством: любой луч, исходящий из начала координат, пересекает поверхность лишь в одной точке. Введем также сферическую систему координат с тем же центром, связанную с декартовой соотношениями:

$$z = r * sin\theta, x = r * cos\theta * cos\varphi, y = r * cos\theta * sin\varphi.$$

В сферической системе координат каждая из поверхностей S_i допускает параметрическое представление

$$r_i = g_i(\varphi, \theta).$$

Предполагаем известными (определенными экспериментально) входными данными о поверхностях S_i наборы значений $r_{i,j}$, $\varphi_{i,j}$, $\theta_{i,j}$, $j = 1, ..., M_i$. При этом угловые переменные могут не образовывать регулярную сетку. В численной модели в качестве гладких восполнений поверхностей S_i будем рассматривать бикубические аппроксимирующие сплайны, построенные по явным формулам [15] с предварительным пересчетом на равномерную сетку с помощью явной иррациональной интерполяции [15,16].

3. Физическая модель

В качестве физической модели будем рассматривать электрическое поле, отражающее проявления имеющихся внутри мозга зарядов и токов. Поле внутри областей $\Omega_i, i = 2, 3, 4$, и внутри поверхности коры вблизи нее считаем потенциальным.

Считаем непрерывной нормальную составляющую тока при переходе через поверхности $S_i, i = 1, 2, 3$, раздела соответствующих сред.

Отметим, что предлагаемый подход принципиально отличается от известных подходов к моделированию с помощью дискретных источников поля тем, что дает новые возможности исследования тока и поля как континуально распределенной субстанции. Это приближает используемый подход к принципам и методам томографического исследования мозга, только при этом вместо плотности вещества объектом является потенциал электрического поля.

4. Математическая модель

Предполагаемая потенциальность поля означает, что поле полностью характеризуется функцией u, удовлетворяющей в каждой из областей Ω_i, $i = 2, 3, 4$ уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad u \in \Omega_i, \qquad i = 2, 3, 4. \tag{1}$$

При этом на границах раздела неоднородностей, поверхностях $S_i, i = 1, 2, 3$, функция u будет удовлетворять следующим граничным условиям

$$[u]_{S_i} = 0, \quad i = 2, 3, 4, \tag{2}$$

$$\left[\sigma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right]_{S_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

$$u_{|_{S_4^0}} = f, \tag{4}$$

где $[u]_{S_i}$ означает скачок функции u при переходе извне через поверхность S_i, а f есть значение потенциала поля на части S_4^0 поверхности скальпа S_4.

Уравнения (1)-(4) представляют собой **базовую** математическую модель, позволяющую рассмотреть следующие задачи.

Прямая общая задача (ПОЗ): задан источник потенциального поля в области Ω_1 (т.е. заданы параметры источника, описываемого некоторой моделью), вычислить значение $u_{|_{S_4^0}}$.

Обратная общая задача (ООЗ): задана функция f на S_4^0, вычислить потенциал поля в Ω/Ω_1 (определить параметры источника, если он описывается некоторой моделью).

Прямая частная задача (ПЧЗ): задана поверхность S^* и потенциал поля на поверхности S^*, вычислить значение $u|_{S_4^0}$.

Обратная частная задача (ОЧЗ): задана функция f на S_4^0, вычислить потенциал поля на поверхности S^*.

Отметим, что содержательная часть обратной задачи зависит от **специальной** математической модели, характеризующей поле. При выборе специальной математической модели источника поля в виде совокупности зарядов и диполей их локализация и интенсивности являются искомыми параметрами.

Используя теорию потенциала построим **специальную** математическую модель задачи, параметрами которой являются некоторые функции. Запишем потенциалы простого слоя

$$V_i(P) = \frac{1}{4\pi} \int\int_{S_i} \frac{\rho_i(M)}{r(P,M)} dS_i(M), i = 1, 2, 3, 4, \tag{5}$$

с плотностями $\rho_i(M)$, точки $M \in S_i$, точка P - произвольная точка из Ω, $r(P, M)$ - расстояние между точками M и P. Потенциал поля в произвольной точке $P \in \Omega$ будем представлять в виде

$$u(P) = \sum_{i=1}^{4} V_i(P). \tag{6}$$

Замечание 1. В случае, когда поверхности S_4 и S_4^0 не совпадают, потенциал простого слоя $V_4(P)$ может быть выбран по формуле (5), где вместо поверхности S_4 взята поверхность S_4^0. Несколько подробнее этот вариант будет отражен в пункте 4 этой статьи.

Как следует из свойств потенциала простого слоя, функция $u(P)$, выбранная в соответствии с представлением (6), удовлетворяет уравнению (1) и соотношениям (2). Требование выполнения условия (3), для функции (6) приводит к системе интегральных уравнений относительно плотностей $\rho_i(M), i = 1, ..., 4$:

$$(\sigma_j + \sigma_{j+1})\rho_j(P) + (\sigma_j - \sigma_{j+1}) \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial V_i(P)}{\partial \vec{n}_j} = 0, P \in S_j, j = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Условие (4) добавляет к (7) уравнение

$$\sum_{i=1}^{4} V_i(P) = f(P), P \in S_4^0. \qquad (8)$$

Учитывая формулы для нормальной производной, уравнения (7)-(8) могут быть записаны в виде системы интегральных уравнений

$$(\sigma_j + \sigma_{j+1})\rho_j(P) + \frac{(\sigma_{j+1} - \sigma_j)}{4\pi} \sum_{i=1}^{4} \int\int_{S_i} \frac{(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_j)}{r^3(P,M)} \rho_i(M) dS_i(M) = 0, \qquad (9)$$

$$P \in S_j, j = 1, 2, 3.$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{1}^{4} \int\int_{S_i} \frac{\rho_i(M)}{r(P,M)} dS_i(M) = f(P), P \in S_4^0. \qquad (10)$$

Формулы (6) и систему уравнений (9)-(10) рассматриваем в качестве **специальной** математической модели. Приведем формулировки общей и частной прямой и обратной задач в рамках (терминах) выбранной специальной математической модели, определяемой представлением (6). Отметим, что упоминаемые в ПОЗ и ООЗ параметрами являются функции $\rho_i(M), i = 1, ..., 4$.

Специальная прямая общая задача (СПОЗ): заданы плотности потенциалов $\rho_i(M), i = 1, ..., 4$, удовлетворяющие системе (9), вычислить функцию $f(P) = u_{|_{P \in S_4^0}}$ по формуле, представляющую левую часть формулы (10).

Специальная обратная общая задача (СООЗ): задана функция $f(P) = u_{|_{P \in S_4^0}}$, представляемая в форме (6), вычислить потенциал поля в Ω/Ω_1 (вычислить плотности $\rho_i(M), i = 1, ..., 4$).

Другими словами, СООЗ состоит в численном решении системы интегральных уравнений (9)-(10) и последующем вычислении значений поля по формуле (6).

Специальная прямая частная задача (СПЧЗ): задана поверхность S^* и потенциал поля на поверхности S^*, вычислить значение $u_{|_{P \in S_4^0}}$.

Специальная обратная частная задача (СОЧЗ): задана функция f на S_4^0, представимая по формуле (6), вычислить потенциал поля на поверхности S^*.

Таким образом, СПЧЗ сводится к решению относительно плотностей потенциалов $\rho_i(M), i = 1, ..., 4$ системы интегральных уравнений (9)-(11), где уравнение (11) есть

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{4} \int\int_{S_i} \frac{\rho_i(M)}{r(P,M)} dS_i(M) = f^*(P), P \in S^*, \qquad (11)$$

и последующему вычислению по формуле (6) функции $f(P)$ при $P \in S_4^0$. Наоборот, СОЧЗ состоит в решении задачи (9)-(10) и вычислении функции $f^*(P)$ по формуле (11).

Система интегральных уравнений может быть записана в форме операторного уравнения

$$A\rho = g, \tag{12}$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)^T, g = (0, 0, 0, f(P))^T$, оператор-матрица A определяется формулами:

$$A = a_{l,k}, a_{l,k} = E\delta_{l,k} + A_{l,k}, l = 1, ..., 3, k = 1, ..., 4,$$

где E – единичный оператор, $\delta_{l,k}$ – символ Кронекера, операторы $A_{l,k}$ определяются выражениями

$$A_{l,k}\rho_k = \frac{(\sigma_{l+1} - \sigma_l)}{4\pi(\sigma_{l+1} + \sigma_l)} \int\int_{S_k} \frac{(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_l)}{r^3(P, M)} \rho_k(M) dS_k(M) = 0, P \in S_l,$$

и действуют компактно из $C(S_k)$ в $C(\Omega)$, а операторы $a_{4,k} = A_{4,k}$, где

$$A_{4,k} = \frac{1}{4\pi} \int\int_{S_k} \frac{\rho_k(M)}{r(P, M)} dS_k(M) = f(P), P \in S_4^0, k = 1, ..., 4.$$

В настоящей статье в дальнейшем мы предполагаем, что выбранная **специальная** математическая модель адекватно отражает рассматриваемые процессы и решение системы интегральных уравнений (9)-(10) (или, что то же, – операторного уравнения (12)) существует и притом единственное для каждой правой части f из заданного класса.

5. Численная модель

Отметим, что в целом рассматриваемая задача является неустойчивой. Характеристики ее неустойчивости такие же, как и у задачи дифференцирования. Поэтому в качестве численной модели, то есть приближенного метода решения системы (9)-(10) используется сплайн-аппроксимационный метод, регуляризирующие свойства которого для такого класса задач обоснованы в работах [15-20]. В рассматриваемом случае метод состоит из трех этапов:

1) сплайн-аппроксимация поверхностей S_i и вычисление их дифференциалов и нормалей;

2) сглаживающая сплайн-аппроксимация функции f на S_4^0 (регуляризирующая обработка исходных данных);

3) искомые функции ρ_i представляются приближенно в виде бикубического сплайна с неизвестными коэффициентами, которые находятся из условий коллокации для системы (9)-(10) (или для системы (9)-(11)) со сглаженной правой частью.

Для задач, аналогичных задаче первого этапа, т.е. гладкого восстановления (моделирования) по исходным дискретным данным поверхностей сложной формы и их производных (в частности – нормалей), автором разработаны явные быстрые методы и алгоритмы в прикладных задачах для авиационной, машиностроительной и других отраслей [23-28]. Дано их обоснование на основе теории изогеометрической аппроксимации функций [17]. Конечно, задачи, рассматриваемые в данной прикладной сфере, имеют свою специфику (задание исходных данных в специальных координатах и т.п.), которую необходимо детально учесть при разработке алгоритмического и программного обеспечения. Изложению таких специальных алгоритмов предполагается посвятить отдельную статью.

Для выполнения второго этапа может быть применен разработанный и реализованный в виде комплекса алгоритмов и программ [18-20], [22] *метод последовательных сплайн-сглаживаний*, обладающий регуляризирующими свойствами.

Основное внимание необходимо уделить исследованию системы интегральных уравнений (9)-(10) и обоснованию предложенного численного метода. Запишем подробнее уравнения, соответствующие третьему этапу сплайн-аппроксимационного метода для СООЗ. В параметрической системе координат искомые плотности приближенно представляются в виде

$$\tilde{\rho}_l(\varphi,\theta) = \sum_i \sum_j c^l_{i,j} s_i(\varphi) s_j(\theta),$$

где $s_i(\varphi)$ – локальные кубические базисные сплайны [29], построенные по узлам $\varphi_{i-2}, ..., \varphi_{i+2}$ сетки $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_l}$, введенной на области изменения параметра φ, аналогично определяются $s_i(\theta)$. Если система координат сферическая, то $\varphi \in [0, 2\pi]$ $\theta \in [0, \pi]$ для поверхностей $S_i, i = 1, 2, 3$. Область изменения этих параметров для поверхности S_4 определяется той частью поверхности S^0_4, на которой задана функция f. Коэффициенты $c^l_{i,j}$ являются искомыми. Для их нахождения используем условия коллокации в точках $P^l_{i,j}$ для операторного уравнения (11) со сглаженной правой частью $\tilde{g}(P)$ и аппроксимированным оператором $\tilde{A} = A_0 + A_1$:

$$(A_0 + A_1)\tilde{\rho}(P) = \tilde{g}(P), P = P^l_{i,j}, i = 1, ..., N_l, j = 1, ..., M_l, l = 1, ..., 4, \quad (13)$$

где главная часть A_0 определена выражением

$$A_0 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^0_{4,4} \end{pmatrix}.$$

Здесь оператор $A^0_{4,4}$ – главная часть оператора $A_{4,4}$. Оператор A_1, получается естественным образом с учетом аппроксимации поверхностей S_i сплайнами. Соотношения (13) приводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $c^l_{i,j}$. При этом число уравнений равно числу неизвестных.

Для теоретического обоснования предложенного численного метода при сделанных предположениях можно воспользоваться результатами общей теории сплайн-аппроксимационного метода [15-20] для установления существования, единственности приближенного решения системы (13), его устойчивости и сходимости к точному решению операторного уравнения (12), а также регуляризирующих свойств решения поставленных частных задач и восстановления потенциала поля в целом.

6. Численные эксперименты на модельных примерах

При проведении численных расчетов рассматриваем простейшую плоскую геометрическую модель. Предполагаем, что мозг сосредоточен в плоской области Ω_1, ограниченной гладкой кривой S_1. Окружающую среду для целей расчетов приведенных в настоящей статье можно считать однородной, занимающей область Ω_2, ограниченной гладкой кривой S_2, так что $\Omega_1 \subset \Omega_2$, кривая S_1 лежит строго внутри кривой S_2. Считаем известным параметрические представления декартовых координат (x_i, y_i) контуров $S_i, i = 1, 2$, заданных с помощью соотношений:

$$x_i = a_i + r_i * g_i(\alpha), y_i = b_i + r_i * \psi_i(\alpha), \alpha \in [0, 2\pi].$$

В проведенных и описанных ниже компьютерных расчетах в качестве кривых $S_i, i = 1, 2$ выбирались, вообще говоря, неконцентрические окружности. При этом

$$g_i(\alpha) = sin(\alpha), \psi_i(\alpha) = cos(\alpha), i = 1, 2.$$

Центр первой окружности совпадает с началом координат: $a_1 = b_1 = 0$, ее радиус – $r_1 = r1$, центр второй –(a_2, b_2), радиус $r_2 = r2$.

Формулы для потенциалов в плоском случае имеют вид

$$V_i(P) = \frac{1}{2\pi}\int_{S_i} \log\frac{1}{r(P,M)}\rho_i(M)dS_i(M), \tag{14}$$

поэтому с учетом *Замечания 1* и формул для нормальных производных потенциалов система уравнений (9) будет иметь вид

$$\frac{1}{2}\rho_1(\varphi) + \frac{g}{4\pi}\int_0^{2\pi}\rho_1(\psi)d\psi - \frac{g*r2}{2\pi}\int_a^b K_1(\varphi,\psi)\rho_2(\psi)d\psi = 0, \varphi\in[0,2\pi], \tag{15}$$

где $g = (\sigma_1-\sigma_2)/(\sigma_1+\sigma_2)$,

$$K_1(\varphi,\psi) = K_2(\varphi,\psi)/R^2(\varphi,\psi),$$

$$K_2(\varphi,\psi) = r2*cos(\varphi-\psi) - r1 + a2*cos(\varphi) + b2*sin(\varphi),$$

$$R^2(\varphi,\psi) = (r1*cos(\varphi) - a2 - r2*cos(\psi))^2 + (r1*sin(\varphi) - b2 - r2*sin(\psi))^2,$$

а краевое условие на контуре C_2 даст уравнение

$$\frac{r1}{4\pi}\int_0^{2\pi}K_3(\alpha,\psi)\rho_1(\psi)d\psi + \frac{r2}{4\pi}\int_a^b K_4(\alpha,\beta)\rho_2(\beta)d\beta = f(\alpha), \alpha\in[a,b]. \tag{16}$$

Здесь обозначено

$$K_3(\alpha,\psi) = log(r_1^2 + r_2^2 - 2*r1*r2*cos(\alpha-\psi)),$$

$$K_4(\alpha,\beta) = log(4r_2^2 sin^2(\alpha-\beta)).$$

Пределы a, b изменения переменной α в уравнении (16) соответствуют той части кривой C_2, где задана функция f. Решение системы (15)-(16) (существование которого мы предполагаем) будем приближенно искать в виде двух одномерных сплайнов с неопределенными коэффициентами

$$\tilde{\rho_1}(\psi) = \sum_{j=0}^{N_1+1} c_j^{(1)} s_j(\psi), \psi\in[0,2pi], \tilde{\rho_2}(\beta) = \sum_{j=0}^{N_2+1} c_j^{(2)}\bar{s}_j(\beta), \beta\in[a,b].$$

Локальные базисные сплайны $s_j(\psi)$ построены по узлам $\psi_{j-2},...,\psi_{j+2}$ равномерной сетки узлов $\psi_i, i = 1,...,N_1$ с шагом $h = 2\pi/(N_1-1)$, а $\bar{s}_j(\beta)$ – по узлам $\beta_{j-2},...,\beta_{j+2}$ равномерной сетки узлов $\beta_i, i = 1,...,N_2$ с шагом $\bar{h} = (b-a)/(N_2-1)$ на отрезке $[a,b]$. Сплайн $\tilde{\rho_1}(\psi)$ считаем периодическим с периодом 2π и его коэффициенты удовлетворяют условиям: $c_0^{(1)} = c_{N_1-1}^{(1)}, c_1^{(1)} = c_{N_1}^{(1)}, c_2^{(1)} = c_{N_1+1}^{(1)}$ Сплайн $\tilde{\rho_1}(\psi)$ при $a=0, b=2\pi$

считаем периодическим и его коэффициенты в этом случае удовлетворяют аналогичным соотношениям; если же $[a,b] \neq [0,2\pi]$, то полагаем $c_0^{(2)} = c_{N_1+1}^{(2)} = 0$. Подставляя эти представления в левые части уравнений (15)-(16) и требуя выполнения условий коллокации в точках

$$\bar{\varphi}_i, i = 1, ..., N_1 - 1, \bar{\alpha}_i, i = 1, ..., N_2 - 1,$$

для уравнений (15) и (16) соответственно, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов

$$Ac = d, \tag{17}$$

где обозначено

$$c = (c_1^{(1)}, ..., c_{N_1}^{(1)}, c_1^{(2)}, ..., c_{N_2}^{(2)})', d = (0, ..., 0, f_1, ..., f_{N_2})', f_i = f(\bar{\alpha}_i), i = 1, ..., N_2,$$

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ G & D \end{pmatrix}.$$

Элементы подматриц, составляющих матрицу A, определяются соотношениями

$$b_{i,j} = \pi * s_j(\bar{\varphi}_i) + g * h/2,$$

$$c_{i,j} = g * r2 * \sum_{l=j-2}^{j+2} p_l * K_1(\bar{\varphi}_i, \beta_l),$$

$$g_{i,j} = \frac{r1}{4\pi} * h * \sum_{l=j-2}^{j+2} p_l * K_3(\bar{\alpha}_i, \psi_l),$$

$$d_{i,j} = \frac{r2}{4\pi} * (d_{i,j}^0 + d_{i,j}^{(1)}),$$

$$d_{i,j}^0 = \int_{\beta_{j-2}}^{\beta_{j+2}} R(\bar{\alpha}_i, \beta) s_j(\beta) d\beta,$$

$$d_{i,j}^{(1)} = \bar{h} * \sum_{l=j-2}^{j+2} p_l * K_5(\bar{\alpha}_i, \beta_l),$$

$$K_5(\alpha, \beta) = K_4(\alpha, \beta) - R(\alpha, \beta),$$

$$R(\alpha, \beta) = \{ \begin{array}{r} log|\alpha - \beta|, \ |\alpha - \beta| \leq \pi, \\ log|2\pi - |\alpha - \beta||, \ |\alpha - \beta| \geq \pi. \end{array}$$

Коэффициенты p_l есть коэффициенты квадратурной формулы, точной на полиномах седьмой степени. Величины $d_{i,j}^0$ главной части вычисляются аналитически, что выполняется для повышения точности вычислений.

Приведем результаты некоторых численных экспериментов. Полагаем $a2 = b2 = 0, a = 0, b = 2\pi, r1 = 3.5, r2 = 4, \sigma_1 = 5, \sigma_2 = 1$.

Пример 1. При решении СОЧЗ в качестве в качестве контура C^* выбираем окружность с центром в нуле и радиусом $r^* = 3$, в качестве точного значения поля выбирается функция $u_{ex}(r, \alpha) = r * sin(\alpha)$ при $r = r^*$. В качестве точного модельного значения поля на контуре C^* выбирается сумма потенциалов V_1, V_2 с плотностями в виде сплайнов на равномерных сетках на контурах C_1, C_2 с числом узлов $N_1 = N_2 = n$, коэффициентами $c_j^{(1)}$ и $c_j^{(2)}$, выбираемыми исходя из выполнения условий сопряжения (15). и условия коллокации функции $u_{ex}(r, \alpha)$ на контуре C^* в узлах сетки $\bar{\alpha}_j, j = 1, ..., n$. По найденным коэффициентам сплайнов решалась приближенно СПЧЗ, то есть вычислялись значения $\tilde{f}$ потенциала на контуре C_2 в точках равномерной на отрезке $[0, 2\pi]$ сетки с числом узлов $N_2 = 11, 21, 31, 61$. По этим исходным данным решалась СОЧЗ, то есть решалась система линейных алгебраических уравнений (17), и по найденным коэффициентам сплайнов вычислялись значения потенциала поля $u_{N_2}(P)$ на контуре C^*, $P \in C^*$. В таблице 1 приведены погрешности восстановления потенциала поля на контуре C^* в равномерной $\Delta_{un}(r^*)$ и среднеквадратичной $\Delta_m(r^*)$ сеточных нормах на сетке с n узлами при $n = 11, 21, 61$:

$$\Delta_{un}(r) = max_{1<=j<=n} d_j(r), \Delta_m(r) = (\sum_{j=1}^{n} d_j^2(r))^{1/2}/n,$$

$$d_j(r) = \|u_{ex}(r, \alpha_j) - u_{N_2}(P)\|, P = (r * cos(\alpha), r * sin(\alpha)).$$

Таблица 1. Пример 1: погрешности решения СОЧЗ

$n =$	11	21	61			
$N_2 =$	11	11	11	21	31	61
$\Delta_{un} =$	$1.3 * 10^{-15}$	0.1942	0.254	0.0255	0.0107	$4.6 * 10^{-15}$
$\Delta_m =$	$2.4 * 10^{-16}$	0.036	0.057	0.0051	0.0014	$2.8 * 10^{-16}$

Пример 2. Решается та же задача, что и в примере 1, но в краевые значения $\tilde{f}$ вносится дополнительный шум, представляющий собой в каждой точке сетки равномерно распределенную случайную величину, не превосходящую по модулю нормированной в среднеквадратичной норме величины $\delta * ||\tilde{f}||$. В таблице 2 приведены погрешности $\Delta_{un}(r^*)$, $\Delta_m(r^*)$ восстановления потенциала поля на контуре C^* в этом случае, когда $\delta = 0.01, 0.05, 0.1, n = 61, N_2 = 11, 21, 31$.

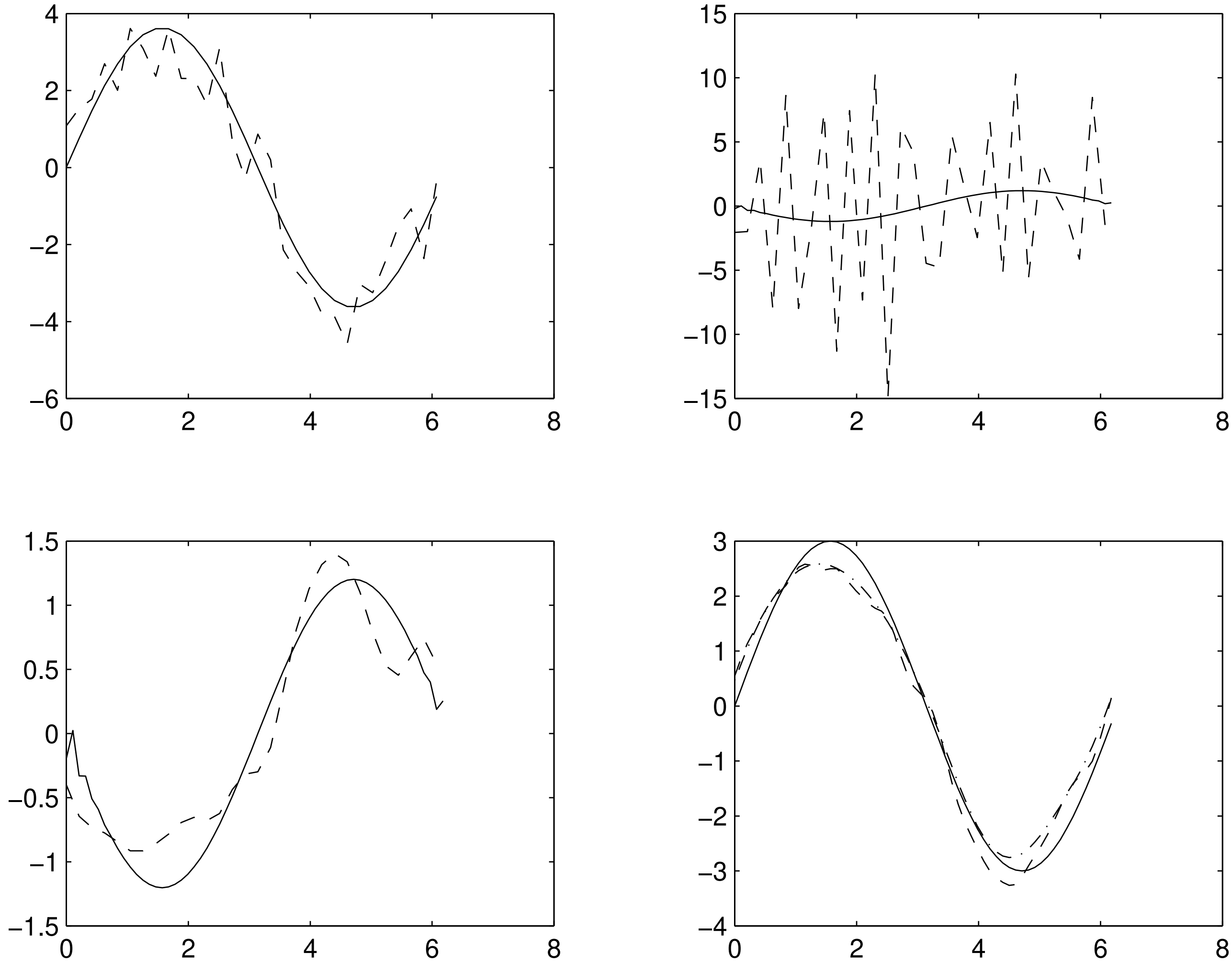

Figure 1: Иллюстрации регуляризирующего эффекта восстановления плотностей потенциалов в примере 2.

На Рис. 1 для рассматриваемой задачи при $\delta = 0.3, n = 61, N_2 = 31$ приведены соответственно на картинках:

1) графики точной модельной правой части системы (17) – сплошной линией, штриховой линией – зашумленной правой части; 2) точное значение модельных коэффициентов $c_j^{(2)}$ – сплошной линией, вычисленное без сглаживаний – штриховой линией; 3) точное значение модельных коэффициентов $c_j^{(2)}$ – сплошной линией, вычисленное с помощью метода последовательны сглаживаний – штриховой линией; 4) точное модельное значение потенциала поля на контуре – сплошной линией, вычисленное без сглаживаний – штриховой линией; со сглаживаниями – штрихпунктирной линией.

Таблица 2. Пример 2: погрешности решения СОЧЗ при зашумленных краевых условиях

δ	0.01			0.05			0.1		
N_2	11	21	31	11	21	31	11	21	31
Δ_{un}	0.211	0.051	0.031	0.320	0.141	0.087	0.426	0.253	0.226
Δ_m	0.058	0.010	0.003	0.118	0.024	0.011	0.147	0.048	0.030

Пример 3. Для решения СООЗ в качестве точного решения выбирается значение суммы потенциалов V_1, V_2 с плотностями в виде сплайнов на равномерных сетках на контурах c_1, C_2 с числом узлов $n = 61$, коэффициентами $c_j^{(2)} = sin(\beta_j)$ и $c_j^{(2)}$, выбираемыми исходя из выполнения условий сопряжения (15). Решалась приближенно СПОЗ, то есть вычислялись значения $\tilde{f}$ потенциала на контуре C_2 в точках равномерной на отрезке $[0, 2\pi]$ сетки с числом узлов $N_2 = 11, 21$. По этим исходным данным решалась СООЗ, то есть решалась система (17) и по найденным коэффициентам сплайнов вычислялись значения потенциала поля на сетке в области Ω в полярных координатах.

На Рис. 2 и 3 соответственно для $N_2 = 11, 21$ приведены: 1) на первом рисунке – графики в зависимости от r величин $\Delta_m(r)$ – сплошная линия, $\Delta_{un}(r)$ – пунктирная; 2) на втором рисунке – графики величин точных коэффициентов $c_j^{(2)}$ – сплошная линия, и вычисленных как решение СООЗ – пунктирная; 3) на третьем рисунке – изолинии в декартовых координатах точного модельного значения потенциала; 4) на четвертом рисунке – изолинии в декартовых координатах вычисленного значения потенциала поля.

Заключение. Как видно из таблиц и графиков при отсутствии шума в краевых значениях полученное решение вполне удовлетворительно по точности восстановления как плотностей потенциалов, так и самого потенциала поля. При наличии шума в краевых значениях в силу неустойчивости задачи плотности потенциалов без регуляризации восстанавливаются с большой погрешностью. Но, тем не менее, в силу сглаживающих свойств интегральных операторов даже без специальной регуляризации решение для самого потенциала поля получается удовлетворительным, хотя и с меньшей точностью, чем при отсутствии шума. Очевиден также регуляризирующий эффект применения метода последовательных сплайн-сглаживаний при восстановлении плотностей потенциалов.

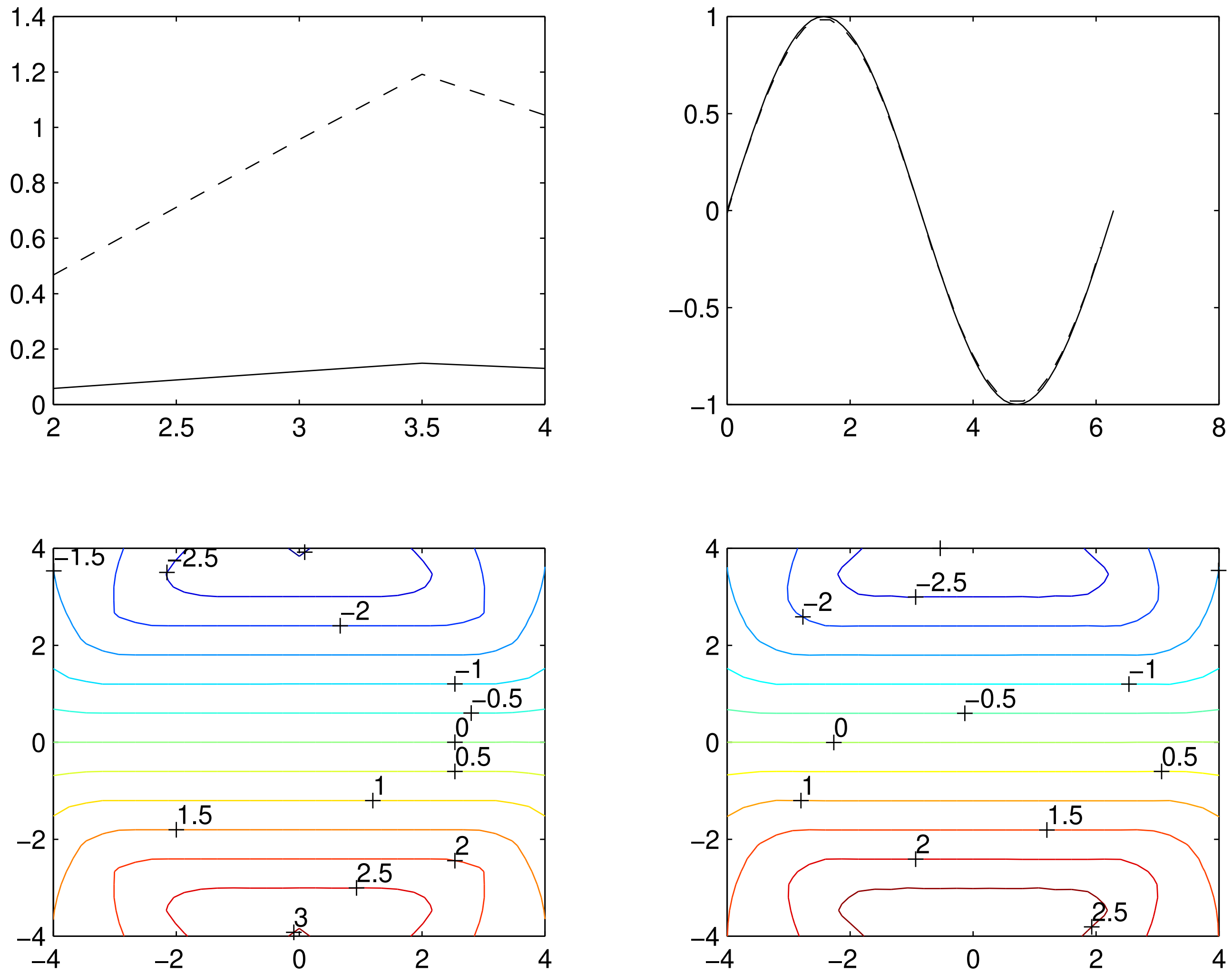

Figure 2: Иллюстрации решения задачи примера 3 при $N_2 = 31$.

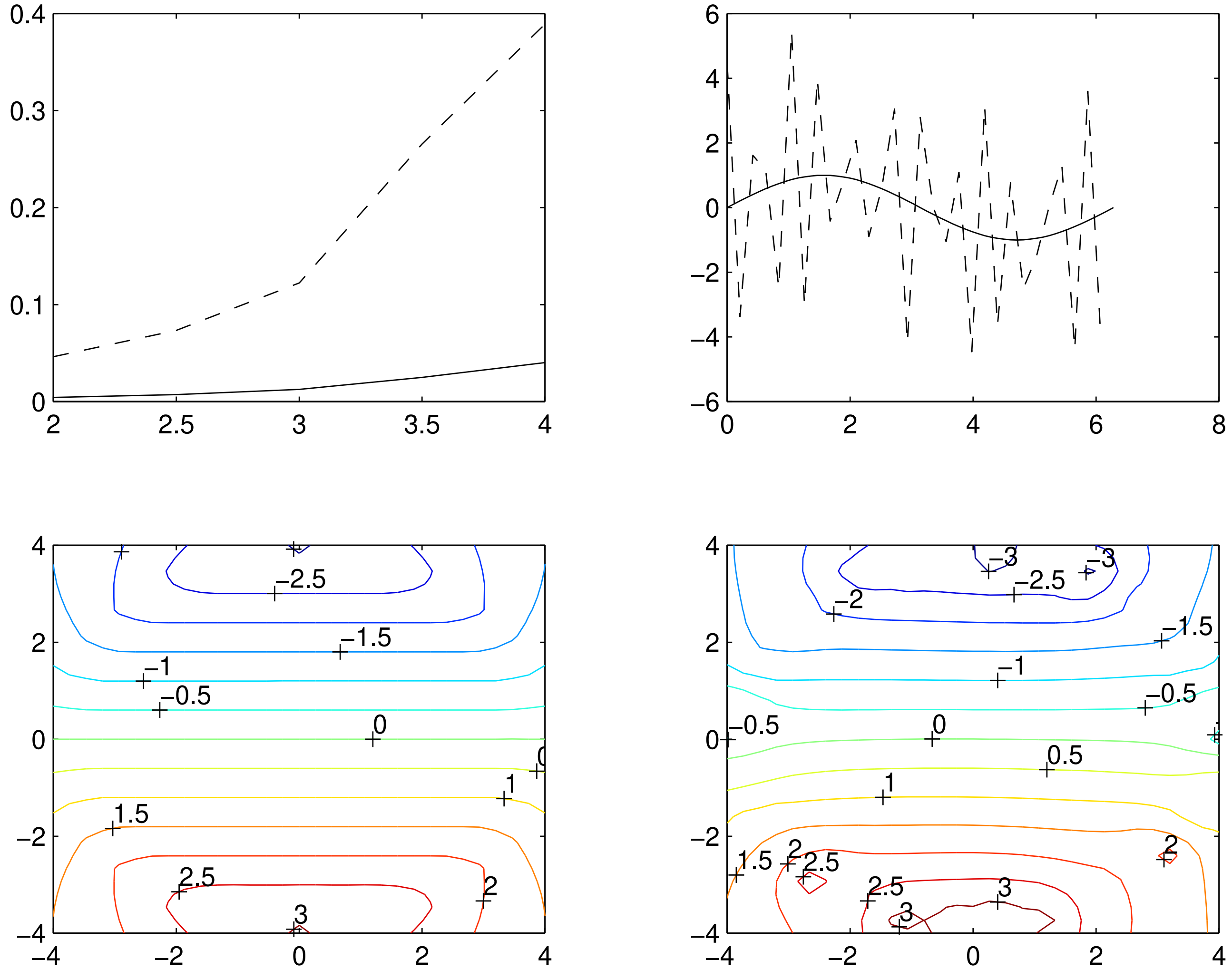

Figure 3: Иллюстрации решения задачи примера 3 при $N_2 = 31$ и зашумленных значениях на границе C_2 с относительной погрешностью $\delta = 0.1$.

Литература

[1] **Plonsey P.L. and Fleming D.G.** Bioelektric Phenomena. N.Y., 1969.

[2] **Nunez P.L.** Elektric Fields of the Brain. N.Y., 1981.

[3] **Гутман А.М.** Биофизика внеклеточных токов мозга. Москва, 1980.

[4] **Кнеппо П., Титомир А.И.** Биомагнитные измерения. Москва, 1989.

[5] **Захаров Е.В., Коптелов Ю.М.** О решении одной задачи математической обработки электроэнцефалографических данных// Докл. Акад. Наук СССР, 1987. Т.292. N 3. С.576-581.

[6] **Гнездицкий В.В., Коптелов Ю.М.и др.** Возможности пространственной локализации источников эпилептических разрядов в ЭЭГ методом эквивалентного диполя // Актуальные вопросы практического здравоохранения. Москва, 1982. С.26-29.

[7] **Коптелов Ю.М., Гнездицкий В.В., Новожилов В.И.** Возможности трехмерной локализации источников ЭЭГ методом эквивалентного диполя // ЖВНД, 1981. Т.31. Вып.2. С.323–332.

[8] **Гнездицкий В.В., Коптелов Ю.М., Корепина О.С.** Роль трехмерной локализации источников ЭЭГ и ВП в клинической практике // Труды конференции "Современное состояние методов неинвазивной диагностики в медицине". Украина, Ялта-Гурзуф, 1996. С.102-105.

[9] **Awada K.A., Jackson D.R. and oth.** Computational Aspects of Finite Element Modelling in EEG Source Localization // IEEE Transactions on Biomedical Engeneering, 1997. V.44, N 8.

[10] **Badier J.-M. and Chauvel P.** Method of Localization Applied to EEG Paroximal Interictal Activities // Epilepsia, 1997. V.38 (Suppl. 10). P.58-65.

[11] **Pascual-Marqui R.D. and Biscay-Lirio R.** Spartial resolution of neuronal generators based on EEG and MEG measurements // Int. J. Neurosci. 1993. V.68. P.93-105.

[12] **Pascual-Marqui R.D. and Michel C. M.** LORETA (Low Resolution brain Electromagnetic Tomography): New Authentic 3D Functional Images of the brain // ISBET Newsletter, N 5, November 1994, ISSN 0947-5133. P.4-8.

[13] **Соболев С.Л.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

[14] **Kolton D. and Kress R.** Integral equations methods in scattering theory. Kriuger Publishing Company, Malabar Florida, 1992.

[15] **Гребенников А.И.** Метод сплайнов в численном анализе. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.

[16] **Гребенников А.И.** Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.

[17] **Гребенников А.И.** Изогеометрическая аппроксимация функций // Численный анализ на ФОРТРАНе. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.

[18] **Гребенников А.И.** Алгоритмы и программы аппроксимации функций одной и нескольких переменных сплайнами и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987.

[19] **Гребенников А.И.** Сплайн-аппроксимационный метод решения некорректных задач // ДАН СССР, 1988. Т.298, N 3, С.533-537.

[20] **Grebennikov A.I.** Spline approximation method for restoring functions // Sov. J. Numer. Anal. Mathem. Modelling. 1989. V.4, N 4. P.1-15.

[21] **Grebennikov A.I.** Solving integral equations with a singularity in the kernel by spline approximation method // Sov. J. Numer. Anal. 1990. V.5. N 3. P.199–208.

[22] **Grebennikov A.I.** Algorithms for experimental data analysis allowing for additional a priori information // Vychislitel'nye Metody; Sistemy Obrabotki na EVM. Plenum Publishing Corporation, 1991. P.148–152.

[23] **Кетков Ю.Л., Гребенников А.И.** Программа "Профиль" аппроксимации профиля червячной фрезы дугами окружностей // Алгоритмы и программы. Инф. бюлл. ВНТИ Центра, 1974, вып. 3, 66.

[24] **Гребенников А.И., Казе В.О.-Л.** Быстрые алгоритмы аппроксимации функций сплайнами и решение некоторых прикладных задач // Методы и алгоритмы в численном анализе. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 154-162.

[25] **Гребенников А.И., Столяренко Л.А.** Численный анализ сплайн-алгоритмов сглаживания функций двух переменных, заданных с погрешностью на нерегулярных сетках // Численный анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С.80-94.

[26] **Гребенников А.И., Разумовский А.И.** Применение сплайнов для изучения деформаций земной поверхности // Численный анализ: методы, алгоритмы, программы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. С.156–164.

[27] **Гребенников А.И., Заикин П.Н., Мерекалова Н.Д., Паатеро П.** Пакет SMOOTH. Аппроксимация, интерполяция, сглаживание. М.: МГУ. Деп. ВИНИТИ 11 окт. 1994, N 2334-В94.

[28] **Гребенников А.И., Приклонский В.И.** Использование пространственно структурированных изображений в задаче построения аналитического описания поверхностей // Численные методы анализа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. С.200-222.

[29] **De Boor C.** On calculation with B-splines // J.Approxim. Theory, 1972. V.6, N1, P.50-62.