С.Ф.Гилязов, В.В.Черный

РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ МЕТОД ПРОЕКЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ[1]

Abstract

Доказана слабая и сильная сходимость регуляризирующего алгоритма на основе итерационного метода проекции сопряженных градиентов для решения нелинейных некоррректных операторных уравнений первого рода, решение которых принадлежит выпуклому замкнутому множеству.

1. Метод проекции сопряженных градиентов для точных данных

1. Рассмотрим задачу приближенного решения операторного уравнения I рода

$$A(u) = f, \tag{1}$$

где $A(u) : D(A) \to F$ — нелинейный оператор, определенный на множестве $D(A)$, пространства U, F — гильбертовы. Мы предполагаем, что уравнение (1) имеет для заданного $f \in F$ единственное решение $\hat{u} \in \mathcal{M} \subset U$, где $\mathcal{M}$ — заданное непустое выпуклое замкнутое множество.

Будем предполагать, что оператор $A\,(u)$ дифференцируем по Фреше, причем производная Фреше $A'(u)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq L\,\|u - v\|\,, \quad u, v \in D\,(A)\,.$$

Для приближенного решения уравнения (1) используем итерационный метод проекции сопряженных градиентов:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= P_{\mathcal{M}}(u_k - \tau_k p_k), & p_0 &= g_0, \\ p_{k+1} &= g_{k+1} + \beta_k p_k, & k &= 0, 1, \ldots, \\ g_k &= [A'(u_k)]^* \, r_k, & r_k &= A(u_k) - f, \end{aligned} \tag{2}$$

где $u_0 \in \mathcal{M}$ — заданный начальный элемент, $\tau_k > 0$, $\beta_k > 0$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 98–01–00345а) и ФНП "Университеты России–фундаментальные исследования" (грант 8854)

Пример 1. *Пусть интегральное уравнение*

$$\int_a^b K(x,y,u(y))dy = f(x), \quad c \le x \le d,$$

имеет для заданной функции $f(x)$ *единственное решение* $\hat{u}(y) \ge 0$. *Тогда в качестве множества* $\mathcal{M}$ *можно взять множество неотрицательных функций, определенных на* $[a,b]$.

Пример 2. *Пусть решение уравнения (1) из априорных соображений должно удовлетворять условию* $\int_a^b \hat{u}^2(y)\,dy < R^2$. *Тогда в качестве множества* $\mathcal{M}$ *можно взять множество функций* w *таких, что* $\int_a^b w^2(y)\,dy \le R^2$.

2. Установим условия слабой сходимости метода проекции сопряженных градиентов к решению уравнения (1).

Теорема 1 *Пусть оператор* $A(u)$ *слабо непрерывен на* $\mathcal{M}$ *и для всякого* u, *принадлежащего множеству* $\mathcal{M} \cap \{u : \|u-\hat{u}\| \le \|u_0-\hat{u}\|\}$, *выполнено неравенство*

$$\left([A'(u)]^*[A(u)-f], u-\hat{u}\right) \ge 0.5\,\|A(u)-f\|^2. \tag{3}$$

Если в методе (2) параметры τ_k *удовлетворяют неравенствам* $\frac{\|r_k\|^2}{2\|p_k\|^2} \ge \tau_k > \tau_* > 0$, *то последовательность* $\{u_k\}$, *определяемая соотношениями (2), слабо сходится к решению уравнения (1), причем* $\|u_{k+1}-\hat{u}\| \le \|u_k-\hat{u}\|$.

Доказательство. Для удобства обозначений положим $z_k = u_k - \hat{u}$ и оценим снизу разность $\|z_{k-1}\|^2 - \|z_k\|^2$. Используя свойство оператора проектирования $\|P_{\mathcal{M}}(u) - P_{\mathcal{M}}(v)\| \le \|u-v\|$ [1, стр. 194], получаем

$$\begin{aligned}\|z_{k-1}\|^2 - \|z_k\|^2 &= \|z_{k-1}\|^2 - \|P_{\mathcal{M}}(u_{k-1}-\tau_{k-1}p_{k-1}) - \hat{u}\|^2 \ge \\ &\ge \|z_{k-1}\|^2 - \|z_{k-1}-\tau_{k-1}p_{k-1}\|^2 = \\ &= 2\tau_{k-1}\left[(z_{k-1},p_{k-1}) - \tau_{k-1}\|p_{k-1}\|^2\right] + \tau_{k-1}^2\|p_{k-1}\|^2.\end{aligned} \tag{4}$$

Оценим снизу выражение $(z_{k-1},p_{k-1}) - \tau_{k-1}\|p_{k-1}\|^2$. При $k=1$ имеем

$$(z_0,p_0) - \tau_0\|p_0\|^2 = (z_0,g_0) - \tau_0\|g_0\|^2. \tag{5}$$

При $k>1$ из формулы для поправки p_{k-1} следует равенство

$$\begin{aligned}(z_{k-1},p_{k-1}) - \tau_{k-1}\|p_{k-1}\|^2 &= (z_{k-1},g_{k-1}) - \tau_{k-1}\|p_{k-1}\|^2 + \\ &+\beta_{k-2}(z_{k-1},p_{k-2}).\end{aligned} \tag{6}$$

Преобразуем в равенстве (6) скалярное произведение при β_{k-2}:

$$\begin{aligned}(z_{k-1},p_{k-2}) &= \tfrac{1}{\tau_{k-2}}(u_{k-1}-u_{k-2}+\tau_{k-2}p_{k-2},\tau_{k-2}p_{k-2})+\\ &\quad +(z_{k-2}-\tau_{k-2}p_{k-2},p_{k-2}) =\\ &= \tfrac{1}{\tau_{k-2}}\left\|\tau_{k-2}p_{k-2}+u_{k-1}-u_{k-2}\right\|^2+\\ &\quad +\tfrac{1}{\tau_{k-2}}(u_{k-1}-u_{k-2}+\tau_{k-2}p_{k-2},u_{k-2}-u_{k-1})+\\ &\quad +(z_{k-2},p_{k-2})-\tau_{k-2}\left\|p_{k-2}\right\|^2.\end{aligned} \tag{7}$$

Используя свойство оператора проектирования (см. [1, стр. 194])

$$(P_{\mathcal{M}}(u)-u,y-P_{\mathcal{M}}(u))\geq 0, y\in U,$$

преобразуем скалярное произведение при $\frac{1}{\tau_{k-2}}$

$$\begin{aligned}&(u_{k-1}-u_{k-2}+\tau_{k-2}p_{k-2},u_{k-2}-u_{k-1})=\\ &=(P_{\mathcal{M}}(u_{k-2}-\tau_{k-2}p_{k-2})-u_{k-2}+\tau_{k-2}p_{k-2},\ u_{k-2}-P_{\mathcal{M}}(u_{k-2}-\tau_{k-2}p_{k-2})),\end{aligned}$$

откуда получаем

$$(u_{k-1}-u_{k-2}+\tau_{k-2}p_{k-2},u_{k-2}-u_{k-1})\geq 0.$$

Отбрасывая в правой части равенства (7) неотрицательные слагаемые, получаем неравенство

$$(z_{k-1},p_{k-2})\geq(z_{k-2},p_{k-2})-\tau_{k-2}\left\|p_{k-2}\right\|^2. \tag{8}$$

Объединяя последнее неравенство с (6), получаем

$$\begin{aligned}(z_{k-1},p_{k-1})-\tau_{k-1}\left\|p_{k-1}\right\|^2 &\geq (z_{k-1},g_{k-1})-\tau_{k-1}\left\|p_{k-1}\right\|^2+\\ &\quad +\beta_{k-2}[(z_{k-2},p_{k-2})-\tau_{k-2}\left\|p_{k-2}\right\|^2].\end{aligned}$$

Используя принцип математической индукции, докажем неравенство

$$(z_{k-1},p_{k-1})-\tau_{k-1}\left\|p_{k-1}\right\|^2\geq\sum_{i=0}^{k-1}\left[(z_i,g_i)-\tau_i\left\|p_i\right\|^2\right]\prod_{j=i}^{k-2}\beta_j. \tag{9}$$

При $k=1$ неравенство (9) выполнено в силу (5). Предположим, что выполнено неравенство

$$(z_{k-2},p_{k-2})-\tau_{k-2}\left\|p_{k-2}\right\|^2\geq\sum_{i=0}^{k-2}\prod_{j=i}^{k-3}\beta_j\left[(z_i,g_i)-\tau_i\left\|p_i\right\|^2\right]$$

и докажем, что отсюда следует (9). В самом деле, в силу (8) и предположения индукции

$$
\begin{aligned}
(z_{k-1},p_{k-1})-\tau_{k-1}\left\|p_{k-1}\right\|^2 &= (z_{k-1},g_{k-1})-\tau_{k-1}\left\|p_{k-1}\right\|^2+\\
&\quad+\beta_{k-2}\left[(z_{k-2},p_{k-2})-\tau_{k-2}\|p_{k-2}\|^2\right]\geq\\
&\geq (z_{k-1},g_{k-1})-\tau_{k-1}\left\|p_{k-1}\right\|^2+\\
&\quad+\beta_{k-2}\sum_{i=0}^{k-2}\left[(z_i,g_i)-\tau_i\left\|p_i\right\|^2\right]\prod_{j=i}^{k-3}\beta_j=\\
&= (z_{k-1},g_{k-1})-\tau_{k-1}\left\|p_{k-1}\right\|^2+\\
&\quad+\sum_{i=0}^{k-2}\left[(z_i,g_i)-\tau_i\left\|p_i\right\|^2\right]\prod_{j=i}^{k-2}\beta_j.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Так как, по определению, $\prod\limits_{j=k-1}^{k-2}\beta_j=1$, то из (10) следует неравенство (9). Умножая (9) на $2\tau_{k-1}$ и подставляя полученное неравенство в (4), получаем

$$
\left\|z_{k-1}\right\|^2-\left\|z_k\right\|^2\geq 2\tau_{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i}^{k-2}\beta_j\left[(z_i,g_i)-\tau_i\left\|p_i\right\|^2\right]+\tau_{k-1}^2\left\|p_{k-1}\right\|^2. \tag{11}
$$

Учитывая, что по определению параметра τ_k и в силу неравенства (3) выполнено неравенство $(z_i,g_i)-\tau_i\|p_i\|^2\geq 0.5\|r_i\|^2-\tau_i\|p_i\|^2\geq 0$, $i\geq 0$, получаем

$$
\begin{aligned}
\left\|z_{k-1}\right\|^2-\left\|z_k\right\|^2 &\geq \tau_{k-1}\left\|r_{k-1}\right\|^2-2\tau_{k-1}^2\left\|p_{k-1}\right\|^2+\tau_{k-1}^2\left\|p_{k-1}\right\|^2\geq\\
&\geq 0.5\tau_{k-1}\left\|r_{k-1}\right\|^2>0.5\tau_*\left\|r_{k-1}\right\|^2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Из неравенства (12) следует ограниченность последовательности $\{u_k\}$, при этом $\lim\limits_{k\to\infty}\|A(u_k)-f\|=0$. Для завершения доказательства теоремы осталось применить лемму 3 из [2].

Теорема доказана.

3. Укажем условия на оператор $A(u)$, при которых выполнено неравенство (3).

1) Пусть производная Фреше $A'(u)$ представима в некоторой окрестности $\mathcal{B}_\rho(\hat{u})$ в виде

$$
A'(u)=R_uA'(\hat{u}). \tag{13}
$$

Здесь $R_u:F\to F$ — линейный ограниченный оператор, при каждом фиксированном $u\in B_\rho(\hat{u})$ такой, что

$$
\|R_u-E\|\leq C\left\|u-\hat{u}\right\|,\quad C>0. \tag{14}
$$

Из теоремы 3 в [3] при $\zeta = 0$ и $C\rho < 0.5$ следует неравенство

$$\tfrac{2(1-2C\rho)}{(2-C\rho)} \left\| A(u) - f \right\|^2 \le \left([A'(u)]^* \left[A(u) - f \right], u - \hat{u} \right),$$

откуда при $C\rho < \frac{2}{7}$ получаем

$$0.5 \left\| A(u) - f \right\|^2 \le \left([A'(u)]^* \left[A(u) - f \right], u - \hat{u} \right), \quad u \in B_\rho\left(\hat{u}\right).$$

2) Если функционал $\left\| A(u) - f \right\|^2$ выпуклый, то неравенство (3) следует из свойств градиента выпуклого функционала [1, стр. 170].

4. Выведем оценки скорости сходимости для невязки.

Теорема 2 *Пусть для всякого* u, *принадлежащего множеству* $\mathcal{M} \cap \{u : \|u - \hat{u}\| \le \|u_0 - \hat{u}\|\}$, *выполнено неравенство*

$$\left([A'(u)]^* \left[A(u) - f \right], u - \hat{u} \right) \ge 0.5 \left\| A(u) - f \right\|^2, \tag{15}$$

и пусть в методе (2) параметры τ_k *выбраны так, что для некоторого фиксированного* $\gamma \in (0,1)$

$$\gamma \tfrac{\|r_k\|^2}{2\|p_k\|^2} \ge \tau_k > 0, \tag{16}$$

$$\|r_k\| \ge \|r_{k+1}\|.$$

Тогда верна оценка

$$\|r_{k-1}\|^2 < \omega_k \frac{\|u_0 - \hat{u}\|^2}{1 - \gamma},$$

где

$$\omega_k^{-1} = \sum_{l=0}^{k-1} \tau_l \sum_{i=0}^{l} \prod_{j=i}^{l-1} \beta_j.$$

Доказательство. Из неравенств (11) и условий (15), (16) следует оценка

$$\begin{aligned} \|z_{k-1}\|^2 - \|z_k\|^2 \ &\ge\ 2\tau_{k-1} \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-2} \beta_j \left[(z_i, g_i) - \tau_i \|p_i\|^2 \right] + \tau_{k-1}^2 \|p_{k-1}\|^2 \ge \\ &\ge\ 2\tau_{k-1} \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-2} \beta_j \left[0.5\,(1-\gamma)\, \|r_i\|^2 + 0.5\gamma \|r_i\|^2 - \tau_i \|p_i\|^2 \right] + \\ &\quad + \tau_{k-1}^2 \|p_{k-1}\|^2 \ge \tau_{k-1} \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-2} \beta_j \,(1-\gamma)\, \|r_i\|^2 . \end{aligned} \tag{17}$$

Так как по условию теоремы норма невязки $\|r_k\|$ не возрастает, то из (17) получаем

$$\|z_{k-1}\|^2 - \|z_k\|^2 \geq \tau_{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-2} \beta_j \|r_{k-1}\|^2 . \tag{18}$$

Просуммируем неравенства (18) от 0 до $k-1$, тогда в силу невозрастания $\|r_k\|$ имеем

$$\|z_0\|^2 - \|z_k\|^2 \ \geq \ (1-\gamma) \sum_{l=0}^{k-1} \tau_l \sum_{i=0}^{l} \prod_{j=i}^{l-1} \beta_j \|r_l\|^2 \geq (1-\gamma)\, \omega_k^{-1} \|r_{k-1}\|^2 .$$

Теорема доказана.

5. Предположим, что решение уравнения (1) представимо в виде $\hat{u} = B\hat{v}$, где $B : V \to U$ — линейный вполне непрерывный оператор, взаимно однозначно действующий из гильбертова пространства V в U. Пусть задано выпуклое замкнутое множество $\mathcal{N} \subset V : B(N) \subset \mathcal{M}$.

Пример 3. *Пусть множество $\mathcal{N}$ задано как $\mathcal{N} = \{v \in V : (v, c) \leq \gamma\}$. Если $c = B^* d$, $d \in U$, то неравенство $\gamma \geq (v, c)$ можно записать как $\gamma \geq (Bv, d)$, и тогда Bv будет принадлежать множеству $\mathcal{M} = \{u \in U : (u, d) \leq \gamma\}$.*

Рассмотрим операторное уравнение

$$A(Bv) = f. \tag{19}$$

Очевидно, уравнение (19) имеет единственное решение $\hat{v}$, связанное с решением уравнения (19) соотношением $\hat{u} = B\hat{v}$.

Введем оператор $G(v) \equiv A(Bv)$. Для приближенного решения (19) используем метод проекции сопряженных градиентов

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= P_{\mathcal{N}}(v_k - \tau_k p_k), & p_0 &= g_0, \\ p_{k+1} &= g_{k+1} + \beta_k p_k, & k &= 0, 1, \ldots, \\ g_k &= [G'(v_k)]^* r_k, & r_k &= G(v_k) - f, \end{aligned} \tag{20}$$

где $v_0 \in \mathcal{N}$ — заданное начальное приближение, $\tau_k > 0$, $\beta_k > 0$.

Теорема 3 *Пусть оператор $G(v)$ слабо непрырывен на $\mathcal{N}$ и для всякого u, принадлежащего множеству $\mathcal{M} \cap \{u : \|u - \hat{u}\| \leq \|u_0 - \hat{u}\|\}$, выполнено неравенство*

$$\left([G'(v)]^* [G(v) - f], v - \hat{v}\right) \geq 0.5 \|G(v) - f\|^2 .$$

Если в методе (20) параметры τ_k удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\|r_k\|^2}{2\|p_k\|^2} \geq \tau_k > \tau_* > 0,$$

то последовательность $\{Bv_k\}$, где $\{v_k\}$ определяется соотношениями (20), сходится к решению уравнения (19) в норме пространства U.

Доказательство. В силу теоремы 1 при $k \to \infty$ v_k сходится слабо к $\hat{v}$. Так как оператор B вполне непрерывен, то $\lim\limits_{k\to\infty} \|Bv_k - \hat{u}\| = 0$.

Теорема доказана.

2. Метод проекции сопряженных градиентов для приближенных данных

1. Пусть исходные данные для уравнения (1) заданы с погрешностью, а именно известны оператор $\tilde{A}(u) : D(A) \to F$, элемент $\tilde{f}$, а также числа $\sigma > 0$, $\delta > 0$ такие, что для произвольного $u \in D(A)$ выполнены условия аппроксимации

$$\left\|\tilde{A}(u) - A(u)\right\| \leq \eta\Omega(u), \quad \left\|\tilde{f} - f\right\| \leq \delta. \tag{21}$$

Здесь функционал $\Omega(u)$ ограничен на любом ограниченном множестве из $D(A)$, $\Omega(0) = 0$.

Будем предполагать, что оператор $\tilde{A}(u)$ дифференцируем по Фреше на $D(A)$, причем производная $\tilde{A}'(u)$ для произвольных $u, v \in D(A)$ удовлетворяет условию аппроксимации

$$\left\|\tilde{A}'(u) - A'(u)\right\| \leq \zeta \|u\|$$

и условию Липшица

$$\left\|\tilde{A}'(u) - \tilde{A}'(v)\right\| \leq L_1 \|u - v\|$$

с константой L_1, не зависящей от ζ, η, δ.

Для приближенного решения уравнения (1) используем итерационный метод проекции сопряженных градиентов:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k+1} &= P_{\mathcal{M}}(\tilde{u}_k - \tilde{\tau}_k\tilde{p}_k), & \tilde{p}_0 &= \tilde{g}_0, \\ \tilde{p}_{k+1} &= \tilde{g}_{k+1} + \tilde{\beta}_k\tilde{p}_k, & k &= 0, 1, \ldots, \\ \tilde{g}_k &= \left[\tilde{A}'(u_k)\right]^* \tilde{r}_k, & \tilde{r}_k &= \tilde{A}(\tilde{u}_k) - \tilde{f}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\tilde{\beta}_k > 0$, $\tilde{\tau}_k > 0$, $u_0 \in \mathcal{M}$ — заданный начальный элемент, не зависящий от σ, ζ.

В общем случае аппроксимация решения $\hat{u}$ элементами $\tilde{u}_k$ может быть осуществлена лишь при условии согласования номера итерации с уровнем возмущения исходных данных задачи.

2. Выведем условия согласования, обеспечивающие слабую сходимость $\tilde{u}_k$ к $\hat{u}$. Как и в разделе 1, определим величину

$$\tilde{\omega}_k^{-1} = \sum_{n=0}^{k-1} \tilde{\tau}_n \left(\sum_{i=0}^{n} \prod_{j=i}^{n-1} \tilde{\beta}_j \right).$$

Теорема 4 *Пусть оператор $A(u)$ слабо непрерывен на $\mathcal{M}$ и для произвольного w из множества $\mathcal{M} \cap \{w : \|w - \hat{u}\| \le 2\|u_0 - \hat{u}\|\}$ выполнено неравенство*

$$\tfrac{1}{8}\left\|\tilde{A}(u) - \tilde{f}\right\|^2 \le \left(\left[\tilde{A}'(u)\right]^* \left[\tilde{A}(u) - \tilde{f}\right], u - \hat{u} \right) + C_1 |\sigma|^2, \tag{23}$$

где $C_1 > 0$ не зависит от σ. Пусть в методе (22) параметры $\tilde{\tau}_k$ выбраны так, что

$$\tfrac{\|\tilde{r}_k\|^2}{8\|\tilde{p}_k\|^2} \ge \tilde{\tau}_k > \tau_* > 0, \tag{24}$$

$$\|\tilde{r}_k\| \ge \|\tilde{r}_{k+1}\|.$$

Если номер $k = k(\sigma)$ удовлетворяет условиям согласования

$$\lim_{\sigma \to 0} k(\sigma) = \infty, \qquad \lim_{\sigma \to 0} |\sigma|^2 \omega_{k(\sigma)}^{-1} = 0,$$

то $\tilde{u}_{k(\sigma)}$ сходится слабо к $\hat{u}$ при $\sigma \to 0$.

Доказательство. Для удобства обозначений положим $\tilde{z}_k = \tilde{u}_k - \hat{u}$. Докажем, что при выполнении условий согласования $\tilde{u}_k$ при всех $k \le k(\sigma)$ удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{z}_k\| \le 2\|u_0 - \hat{u}\|. \tag{25}$$

Очевидно, неравенство (25) выполнено для $k = 0$. Предположим, что доказано неравенство

$$\|\tilde{z}_{k-1}\| \le 2\|z_0\|, \tag{26}$$

и докажем, что

$$\|\tilde{z}_k\| \le 2\|z_0\|. \tag{27}$$

Повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 1, можно доказать для приближенных данных неравенство

$$\|\tilde{z}_{k-1}\|^2 - \|\tilde{z}_k\|^2 \geq 2\tilde{\tau}_{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-2} \tilde{\beta}_j \left[(\tilde{z}_i, \tilde{g}_i) - \tilde{\tau}_i \|\tilde{p}_i\|^2\right] + \tilde{\tau}_{k-1}^2 \|\tilde{p}_{k-1}\|^2. \qquad (28)$$

Так как имеет место (26), то неравенство (23) справедливо для $u = \tilde{u}_i$, $0 \leq i \leq k-1$. Тогда из (28) с использованием неравенства (24) получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}_{k-1}\|^2 - \|\tilde{z}_k\|^2 \ \geq\ & 2\tilde{\tau}_{k-1} \sum_{i=0}^{k-2} \prod_{j=i}^{k-2} \tilde{\beta}_j \left[\tfrac{1}{8}\|\tilde{r}_i\|^2 - \tilde{\tau}_i \|\tilde{p}_i\|^2 - C_1 |\sigma|^2\right] + \\ & + \tilde{\tau}_{k-1}\left[\tfrac{1}{4}\|\tilde{r}_{k-1}\|^2 - \tilde{\tau}_{k-1}\|\tilde{p}_{k-1}\|^2 - 2C_1|\sigma|^2\right] \geq \\ \geq\ & \tfrac{1}{8}\tilde{\tau}_{k-1}\|\tilde{r}_{k-1}\|^2 - 2C_1|\sigma|^2 \tilde{\tau}_{k-1} \sum_{i=0}^{k-1}\prod_{j=i}^{k-2}\tilde{\beta}_j. \end{aligned} \qquad (29)$$

Складывая неравенства (29) для всех $k \leq k(\sigma)$ и перегруппировывая слагаемые, получаем

$$\|z_0\|^2 + 2C_1|\sigma|^2 \sum_{l=0}^{k-1} \tilde{\tau}_l \sum_{i=0}^{l} \prod_{j=i}^{l-1} \tilde{\beta}_j \ \geq\ \frac{1}{8}\sum_{l=0}^{k-1}\tilde{\tau}_l \|\tilde{r}_l\|^2 + \|\tilde{z}_k\|^2 > \|\tilde{z}_k\|^2. \qquad (30)$$

В силу условий согласования при достаточно малых $|\sigma|$ верна оценка

$$2C_1|\sigma|^2 \sum_{l=0}^{k-1}\tilde{\tau}_l \sum_{i=0}^{l}\prod_{j=i}^{l-1}\tilde{\beta}_j \ \leq\ 3\|z_0\|^2,$$

используя которую, получаем (27).

В силу (27) семейство $\left\{\tilde{u}_{k(\sigma)}\right\}$ слабо компактно. Используя убывание последовательности $\|\tilde{r}_k\|$, из (30) получаем

$$\|z_0\|^2 + 2C_1|\sigma|^2 \sum_{l=0}^{k-1}\tilde{\tau}_l \sum_{i=0}^{l}\prod_{j=i}^{l-1}\tilde{\beta}_j \ >\ \frac{1}{8}\sum_{l=0}^{k-1}\tilde{\tau}_l\|\tilde{r}_l\|^2 > \frac{\tau_* k(\sigma)}{8}\left\|\tilde{r}_{k(\sigma)}\right\|^2,$$

откуда следует предельное соотношение $\lim\limits_{\sigma\to 0}\left\|\tilde{r}_{k(\sigma)}\right\| = 0$. Используя неравенство треугольника и условия аппроксимации (21), имеем

$$\left\|A(\tilde{u}_{k(\sigma)}) - f\right\| \ \leq\ \eta\Omega\left(\tilde{u}_{k(\sigma)}\right) + \delta + \left\|\tilde{r}_{k(\sigma)}\right\|. \qquad (31)$$

Переходя в (31) к пределу при $\sigma \to 0$, получаем $\lim\limits_{\sigma\to 0}\left\|A(\tilde{u}_{k(\sigma)}) - f\right\| = 0$. Для завершения доказательства теоремы осталось применить лемму 3 из [2].

Теорема доказана.

3. Укажем условия на оператор $\tilde{A}(u)$, при которых выполнено неравенство (23).

1) Пусть выполнены условия (13)–(14) на оператор $A(u)$.

Теорема 5 *Пусть $C\rho < \frac{2}{7}$, тогда для любого $u \in B_\rho(\hat{u})$ выполнено неравенство (23).*

Доказательство. Из теоремы 1, a и теоремы 2, b в [3] следует неравенство

$$\left\|\tilde{A}(u) - \tilde{A}(\hat{u}) - \tilde{A}'(u)\,(u-\hat{u})\right\| \;\le\; \tfrac{3C\rho}{2-C\rho}\left\|\tilde{A}(u) - \tilde{A}(\hat{u})\right\| + \zeta K\,(\rho,\hat{u})\,. \qquad (32)$$

Введем обозначения $\tilde{r}_u = \tilde{A}(u) - \tilde{f}$, $z = u - \hat{u}$. Используя неравенство треугольника и оценку (32), оценим норму $\tilde{r}_u - \tilde{A}'(u)z$:

$$\left\|\tilde{r}_u - \tilde{A}'(u)z\right\| \;\le\; \tfrac{3C\rho}{2-C\rho}\left\|\tilde{r}_u\right\| + \Delta_\rho, \qquad (33)$$

где $\Delta_\rho = \frac{2(1+C\rho)}{2-C\rho}\Delta + \zeta K\,(\rho,\hat{u})$, $\Delta = \eta\Omega(\hat{u}) + \delta$, $K\,(\rho,\hat{u})$ — постоянная величина, не зависящая от уровня возмущения исходных данных.

Возведем в квадрат обе части (33), тогда

$$\left[1 - \left(\tfrac{3C\rho}{2-C\rho}\right)^2\right]\left\|\tilde{r}_u\right\|^2 + \left\|\tilde{A}'(u)z\right\|^2 \;\le\; 2\left(\left[\tilde{A}'(u)\right]^*\tilde{r}_u, z\right) + \Delta_\rho^2 + 2\Delta_\rho\tfrac{3C\rho}{2-C\rho}\left\|\tilde{r}_u\right\|. \qquad (34)$$

Используя теорему 3, a из [3], имеем для $C\rho < \frac{1}{2}$

$$\tfrac{2(1-2C\rho)}{2-C\rho}\left\|\tilde{r}_u\right\| - \tfrac{2(1-2C\rho)}{2-C\rho}\Delta - \zeta K\,(\rho,\hat{u}) \;\le\; \left\|\tilde{A}'(u)z\right\|. \qquad (35)$$

Возведем обе части (35) в квадрат

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{2(1-2C\rho)}{2-C\rho}\right)^2\left\|\tilde{r}_u\right\|^2 + \left[\tfrac{2(1-2C\rho)}{2-C\rho}\Delta + \zeta K\,(\rho,\hat{u})\right]^2 - \\ &\quad -2\tfrac{2(1-2C\rho)}{2-C\rho}\left[\tfrac{2(1-2C\rho)}{2-C\rho}\Delta + \zeta K\,(\rho,\hat{u})\right]\left\|\tilde{r}_u\right\| \;\le\; \left\|\tilde{A}'(u)z\right\|^2.\end{aligned} \qquad (36)$$

Складывая неравенства (34), (36) и приводя подобные члены, с точностью до постоянных C_2, C_3 получаем

$$\tfrac{2(1-2C\rho)}{2-C\rho}\left\|\tilde{r}_u\right\|^2 - C_2|\sigma|^2 \le 2\left(\left[\tilde{A}'(u)\right]^*\tilde{r}_u, z\right) + 2C_3|\sigma|\left\|\tilde{r}_u\right\|. \qquad (37)$$

Так как при $C\rho < \frac{2}{7}$ справедливо неравенство $\frac{2(1-2C\rho)}{2-C\rho} > \frac{1}{2}$, то, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, из (37) получаем

$$0.5\left\|\tilde{r}_u\right\|^2 - C_2|\sigma|^2 \le 2\left(\left[\tilde{A}'(u)\right]^*\tilde{r}_u, z\right) + 0.25\left\|\tilde{r}_u\right\|^2 + 4C_3^2|\sigma|^2. \qquad (38)$$

Для завершения доказательства достаточно привести в (38) подобные члены и разделить на 2.

Теорема доказана.

2) Если функционал $\left\|\tilde{A}(u)-\tilde{f}\right\|^2$ выпуклый, то неравенство (23) следует из свойств градиента выпуклого функционала [1, стр. 170].

4. Пусть решение уравнения (1) представимо в виде $\hat{u}=B\hat{v}$, где $B: V\to U$ — линейный вполне непрерывный оператор, взаимно однозначно действующий из гильбертова пространства V в гильбертово пространство U. Пусть задано выпуклое замкнутое множество $\mathcal{N}\subset V$: $B(\mathcal{N})\subset\mathcal{M}$.

Будем предполагать, что оператор B задан с погрешностью: заданы линейный оператор $\tilde{B}: V\to U$ и положительное число ξ такое, что $\left\|\tilde{B}-B\right\|\le\xi$.

Введем оператор $\tilde{G}(v)\equiv\tilde{A}(\tilde{B}v)$. Для приближенного решения уравнения (1) используем метод проекции сопряженных градиентов

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{k+1}&=P_{\mathcal{N}}(\tilde{v}_k-\tilde{\tau}_k\tilde{p}_k), && \tilde{p}_0=\tilde{g}_0,\\ \tilde{p}_{k+1}&=\tilde{g}_{k+1}+\tilde{\beta}_k\tilde{p}_k, && k=0,1,\ldots,\\ \tilde{g}_k&=\left[\tilde{G}'(\tilde{v}_k)\right]^*\tilde{r}_k, && \tilde{r}_k=\tilde{G}(\tilde{v}_k)-\tilde{f}, \end{aligned}\tag{39}$$

где $v_0\in\mathcal{N}$ — заданное начальное приближение, $\tilde{\tau}_k>0$, $\tilde{\beta}_k>0$.

Теорема 6 *Пусть оператор $G(v)$ слабо непрерывен на $\mathcal{N}$ и для всякого w из множества $\mathcal{N}\cap\{w:\|w-\hat{v}\|\le 2\|v_0-\hat{v}\|\}$ выполнено неравенство*

$$\tfrac{1}{8}\left\|\tilde{G}(v)-f\right\|^2 \ \le\ \left(\left[\tilde{G}'(v)\right]^*\left[\tilde{G}(v)-f\right], v-\hat{v}\right)+C_1\left(|\sigma|^2+\xi^2\right),$$

где $C_1>0$ не зависит от σ,ξ. Пусть в методе (39) параметры $\tilde{\tau}_k$ выбраны так, что

$$\begin{gathered}\tfrac{\|\tilde{r}_k\|^2}{8\|\tilde{p}_k\|^2}\ge\tilde{\tau}_k>\tau_*>0,\\ \|\tilde{r}_k\|\ge\|\tilde{r}_{k+1}\|.\end{gathered}$$

Если $k=k(\sigma,\xi)$ удовлетворяет условиям согласования:

$$\lim_{\sigma,\xi\to 0}k(\sigma,\xi)=\infty,\qquad \lim_{\sigma,\xi\to 0}\left(|\sigma|^2+\xi^2\right)\tilde{\omega}^{-1}_{k(\sigma,\xi)}<+\infty,$$

то $\tilde{B}\tilde{v}_{k(\sigma,\xi)}$ сходится к $\hat{u}$ при $\sigma,\xi\to 0$ в норме пространства U.

Доказательство. В силу теоремы 4 $\tilde{v}_{k(\sigma,\xi)}$ сходится слабо к $\hat{v}$ при $\sigma,\xi\to 0$. Используя неравенство треугольника и полную непрерывность оператора B, имеем

$$\left\|\tilde{B}\tilde{v}_{k(\sigma,\xi)}-\hat{u}\right\| \ \le\ \xi\left\|\tilde{v}_{k(\sigma,\xi)}\right\|+\left\|B\tilde{v}_{k(\sigma,\xi)}-\hat{u}\right\|\to 0$$

при $\sigma,\xi\to 0$.

Теорема доказана.

3. Метод проекции сопряженных градиентов для специального множества ограничений — шара

1. Пусть множество ограничений $\mathcal{M}$ — шар: $\mathcal{M} = \{u \in U : \|u - u^*\| \le \rho\}$. В этом случае последовательность метода проекции сопряженных направлений является ограниченной по построению, а следовательно, слабо компактной.

Если оператор A — линейный ограниченный, можно указать достаточные условия сильной сходимости метода проекции сопряженных градиентов.

Рассмотрим последовательность $\{u_k\}$, определяемую соотношениями

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= P_{\mathcal{M}}(u_k - \tau_k p_k), \quad && p_0 = g_0, \\ p_{k+1} &= g_{k+1} + \beta_k p_k, && k = 0, 1, \ldots, \qquad (40) \\ g_k &= A^* r_k, && r_k = Au_k - f, \\ \gamma \tfrac{\|r_k\|^2}{\|p_k\|^2} &\ge \tau_k > \tau_* > 0, && \beta_k > 0, \qquad (41) \end{aligned}$$

где $u_0 \in \mathcal{M}$ — заданный начальный элемент, γ удовлетворяет условиям $1 > \gamma > 0$.

2. Для удобства обозначений снова введем величину

$$\omega_k^{-1} = \sum_{n=0}^{k-1} \tau_n \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=i}^{n-1} \beta_j.$$

Справедлива следующая

Теорема 7 *Пусть $\mathcal{M} = \{u \in U : \|u - u^*\| \le \rho\}$ — шар радиуса ρ с центром в точке u^*, оператор A — линейный ограниченный, $\{u_k\}$ определяется соотношениями (40), (41) для произвольного $u_0 \in \mathcal{M}$.*

Тогда из предельного соотношения

$$\lim_{k\to\infty} \|r_k\| \, \omega_k^{-1/2} = 0 \qquad (42)$$

следует сильная сходимость $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - \hat{u}\| = 0$.

Доказательство. Так как $\|u_k - \hat{u}\| \le \rho + \|u^* - \hat{u}\|$, то из условия (42) и леммы 2 из [2] следует слабая сходимость $u_k \rightharpoonup \hat{u}$.

В соответствии с определением операции проектирования на шар [1, стр. 195] если $u_{k-1} - \tau_{k-1} p_{k-1} \notin \mathcal{M}$, то

$$u_k = u^* + \frac{\rho}{\|u_{k-1} - \tau_{k-1} p_{k-1} - u^*\|}(u_{k-1} - \tau_{k-1} p_{k-1} - u^*). \qquad (43)$$

Если же $u_{k-1} - \tau_{k-1} p_{k-1} \in \mathcal{M}$, то по определению проекции

$$u_k = u_{k-1} - \tau_{k-1} p_{k-1}. \tag{44}$$

Положим $\gamma_{k-1} = \max\left\{1, \frac{1}{\rho}\|u_{k-1} - \tau_{k-1}p_{k-1} - u^*\|\right\}$ и заметим, что по определению $\gamma_{k-1} \geq 1$. Используя введенное обозначение, запишем (43) и (44) одной формулой

$$u_k = (1 - \gamma_{k-1}^{-1}) u^* + \gamma_{k-1}^{-1}(u_{k-1} - \tau_{k-1}p_{k-1}).$$

Таким образом, операция проектирования на шар сводится к умножению проектируемого элемента на число. Очевидно выполнение равенства

$$z_k = (1 - \gamma_{k-1}^{-1}) z^{(1)} + \gamma_{k-1}^{-1}(z_{k-1} - \tau_{k-1}p_{k-1}), z^{(1)} = u^* - \hat{u}. \tag{45}$$

Используем принцип математической индукции для вывода общей формы ошибки z_n после n итераций. При $k = 0$ получаем равенство $z_1 = (1 - \gamma_0^{-1})z^{(1)} + \gamma_0^{-1}(z_0 - \tau_0 p_0)$. Предположим теперь, что для всех $n < k$ верно равенство

$$z_n = \sum_{i=0}^{n-1}(1 - \gamma_i^{-1}) \prod_{j=i+1}^{n-1} \gamma_j^{-1} z^{(1)} + \prod_{j=0}^{n-1} \gamma_j^{-1} z_0 - \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{n-1} \gamma_j^{-1} p_i, \tag{46}$$

и докажем формулу (46) для $n = k$. Подставим формулу (46) для $n = k-1$ в (45)

$$\begin{aligned} z_k &= (1 - \gamma_{k-1}^{-1})z^{(1)} + \gamma_{k-1}^{-1} \sum_{i=0}^{k-2}(1 - \gamma_i^{-1}) \prod_{j=i+1}^{k-2} \gamma_j^{-1} z^{(1)} + \\ &\quad + \gamma_{k-1}^{-1} \prod_{j=0}^{k-2} \gamma_j^{-1} z_0 - \gamma_{k-1}^{-1} \sum_{i=0}^{k-2} \tau_i \prod_{j=i+1}^{k-2} \gamma_j^{-1} p_i - \tau_{k-1}\gamma_{k-1}^{-1}p_{k-1} = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1}(1 - \gamma_i^{-1}) z^{(1)} \prod_{j=i+1}^{k-1} \gamma_j^{-1} + \prod_{j=0}^{k-1} \gamma_j^{-1} z_0 - \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i p_i \prod_{j=i+1}^{k-1} \gamma_j^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (46) справедлива для всех n. Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{k-1}(1 - \gamma_i^{-1}) \prod_{j=i+1}^{k-1} \gamma_j^{-1} = 1 - \prod_{j=0}^{k-1} \gamma_j^{-1}. \tag{47}$$

Используя (47) и выражение поправки через градиенты на всех итерациях $p_i = \sum_{s=0}^{i} g_i \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n$, преобразуем формулу (46)

$$\begin{aligned} z_k &= \left(1 - \prod_{j=0}^{k-1} \gamma_j^{-1}\right) z^{(1)} + \prod_{j=0}^{k-1} \gamma_j^{-1} z_0 - \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{k-1} \gamma_j^{-1} \sum_{s=0}^{i} A^* r_s \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n = \\ &= z^{(1)} + \prod_{j=0}^{k-1} \gamma_j^{-1}(u_0 - u^*) - \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{k-1} \gamma_j^{-1} \sum_{s=0}^{i} A^* r_s \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n. \end{aligned} \tag{48}$$

Используя свойства скалярного произведения и полагая $z^{(2)} = u_0 - u^*$, получаем из (48)

$$\|z_k\|^2 = (z^{(1)}, z_k) + \prod_{j=0}^{k-1} \gamma_j^{-1} (z^{(2)}, z_k) - \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{k-1} \gamma_j^{-1} \sum_{s=0}^{i} \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n (r_s, r_k). \qquad (49)$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (49), используя неравенство треугольника, очевидное неравенство $\prod\limits_{j=i+1}^{k-1} \gamma_j^{-1} \leq 1$ и неравенство Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{k-1} \gamma_j^{-1} \sum_{s=0}^{i} \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n (r_s, r_k) \ &\leq \left| \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{k-1} \gamma_j^{-1} \sum_{s=0}^{i} \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n (-r_s, r_k) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \sum_{s=0}^{i} \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n \left| (-r_s, r_k) \right| \leq \\ &\leq \|r_k\| \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \sum_{s=0}^{i} \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n \|r_s\| . \end{aligned} \qquad (50)$$

Меняя порядок суммирования, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \sum_{s=0}^{i} \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n \|r_s\| &= \sum_{i=0}^{k-1} \|r_i\| \left(\sum_{l=i}^{k-1} \tau_l \prod_{j=i}^{l-1} \beta_j \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \|r_i\| \left(\sum_{l=i}^{k-1} \tau_l \prod_{j=i}^{l-1} \beta_j \right)^{1/2} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \tau_l \prod_{j=i}^{l-1} \beta_j \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда, применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем оценку

$$\sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \sum_{s=0}^{i} \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n \|r_s\| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \tau_l \prod_{j=i}^{l-1} \beta_j \right)} \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \tau_l \prod_{j=i}^{l-1} \beta_j \right) \|r_i\|^2}. \qquad (51)$$

Меняя порядок суммирования, легко убедиться в справедливости равенства $\sum\limits_{i=0}^{k-1} \left(\sum\limits_{l=i}^{k-1} \tau_l \prod\limits_{j=i}^{l-1} \beta_j \right) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \tau_i \sum\limits_{s=0}^{i} \prod\limits_{n=s}^{i-1} \beta_n = \omega_k^{-1}$, с учетом которого неравенство (51) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \sum_{s=0}^{i} \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n \|r_s\| \leq \omega_k^{-1/2} \sqrt{\sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{l=i}^{k-1} \tau_l \prod_{j=i}^{l-1} \beta_j \right) \|r_i\|^2}. \qquad (52)$$

Повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 1, в соответствии с соотношением (11) и равенством для квадратичного функционала $(g_i, z_i) = \|r_i\|^2$ получаем

$$\|z_k\|^2 - \|z_{k+1}\|^2 \geq 2\tau_k \sum_{i=0}^{k-1} \prod_{j=i}^{k-2} \beta_j \left[\|r_i\|^2 - \tau_i \|p_i\|^2 \right] + \tau_k^2 \|p_k\|^2 . \qquad (53)$$

Суммируем (53) по k от 0 до n и используем условия (41) на параметр τ_k, тогда

$$\|z_0\|^2 - \|z_{n+1}\|^2 > 2(1-\gamma) \sum_{k=0}^{n} \tau_k \sum_{i=0}^{k} \prod_{j=i}^{k-1} \beta_j \|r_i\|^2 .$$

Отсюда в силу неравенства $1-\gamma > 0$ получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \tau_k \sum_{i=0}^{k} \prod_{j=i}^{k-1} \beta_j \|r_i\|^2 < \frac{\|z_0\|^2}{2(1-\gamma)}.$$

Подставим полученное неравенство в (52), тогда

$$\sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \sum_{s=0}^{i} \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n \|r_s\| \le \frac{\|z_0\|}{\sqrt{2(1-\gamma)}} \omega_k^{-1/2},$$

и неравенство (50) принимает вид

$$-\sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{k-1} \gamma_j^{-1} \sum_{s=0}^{i} \prod_{n=s}^{i-1} \beta_n (r_s, r_k) \le \frac{\|z_0\|}{\sqrt{2(1-\gamma)}} \|r_k\| \omega_k^{-1/2}. \tag{54}$$

Используя неравенство (54), вернемся к оценке для $\|z_k\|$ (49):

$$\|z_k\|^2 < \left|(z^{(1)}, z_k)\right| + \left|(z^{(2)}, z_k)\right| + \frac{\|z_0\|}{\sqrt{2(1-\gamma)}} \|r_k\| \omega_k^{-1/2}. \tag{55}$$

В силу условия теоремы $\lim\limits_{k\to\infty} \|r_k\| \omega_k^{-1/2} = 0$ из (55) следует сильная сходимость u_k к $\hat{u}$. Теорема доказана.

3. Будем предполагать, что исходные данные заданы с погрешностью, а именно задан линейный ограниченный оператор $\tilde{A} : U \to F$ и элемент $\tilde{f} \in F$ такие, что

$$\|\tilde{A} - A\| \le \eta, \quad \|\tilde{f} - f\| \le \delta.$$

Для удобства обозначений введем величину $\sigma = (\eta, \delta)$.

Рассмотрим последовательность $\{\tilde{u}_k\}$, определяемую соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k+1} &= P_{\mathcal{M}}(\tilde{u}_k - \tilde{\tau}_k \tilde{p}_k), & \tilde{p}_0 &= \tilde{g}_0, \\ \tilde{p}_{k+1} &= \tilde{g}_{k+1} + \tilde{\beta}_k \tilde{p}_k, & k &= 0, 1, \ldots, \\ \tilde{g}_k &= \tilde{A}^* \tilde{r}_k, & \tilde{r}_k &= \tilde{A}\tilde{u}_k - \tilde{f}, \end{aligned} \tag{56}$$

$$\gamma \frac{\|\tilde{r}_k\|^2}{\|\tilde{p}_k\|^2} \ge \tilde{\tau}_k > \tau_* > 0, \quad \tilde{\beta}_k > 0. \tag{57}$$

где u_0 — заданный начальный элемент, не зависящий от η, δ, а постоянная γ удовлетворяет условию $\gamma \in (0,1)$.

4. Справедлива следующая

Теорема 8 *Пусть зависимость $k(\sigma)$ для последовательности (56), (57) выбрана так, что выполнены условия*

$$\lim_{\sigma\to 0}\tilde\omega_{k(\sigma)}=0,\quad \lim_{\sigma\to 0}\left\|\tilde A\tilde u_{k(\sigma)}-\tilde f\right\|\tilde\omega_{k(\sigma)}^{-1/2}=0,\quad \lim_{\sigma\to 0}|\sigma|\,\tilde\omega_{k(\sigma)}^{-1/2}=0.$$

где

$$\tilde\omega_k^{-1}=\sum_{n=0}^{k-1}\tilde\tau_n\left(\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=i}^{n-1}\tilde\beta_j\right).$$

Тогда $\lim\limits_{\sigma\to 0}\left\|\tilde u_{k(\sigma)}-\hat u\right\|=0$.

Доказательство. Последовательность $\{\tilde u_k\}$ ограничена, так как ограничено множество $\mathcal{M}$: $\|\tilde u_k\|\le\|u^*\|+\rho$. Используя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned}\|A\tilde u_k-f\| &\le \left\|\tilde A-A\right\|\|\tilde u_k\|+\|\tilde r_k\|+\left\|f-\tilde f\right\|\le\\ &\le \eta\left(\|u^*\|+\rho\right)+\|\tilde r_k\|+\delta.\end{aligned}\tag{58}$$

Пусть зависимость $k(\sigma)$ выбрана в соответствии с условием теоремы. Элементарными преобразованиями из (58) получаем оценку

$$\left\|A\tilde u_{k(\eta,\delta)}-f\right\|\le\eta\left(\|u^*\|+\rho\right)+\left(\left\|\tilde r_{k(\eta,\delta)}\right\|\tilde\omega_{k(\eta,\delta)}^{-1/2}\right)\tilde\omega_{k(\eta,\delta)}^{1/2}+\delta,$$

из которой следует равенство $\lim\limits_{\sigma\to 0}\left\|A\tilde u_{k(\eta,\delta)}-f\right\|=0$. В силу леммы 3 из [2] семейство $\tilde u_{k(\sigma)}$ сходится слабо к $\hat u$ при $\sigma\to 0$. Докажем теперь сильную сходимость $\tilde u_{k(\sigma)}\to\hat u$.

Повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 7, запишем соотношение (48) для приближенных данных

$$\tilde z_k=z^{(1)}+\prod_{j=0}^{k-1}\tilde\gamma_j^{-1}z^{(2)}-\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\prod_{j=i+1}^{k-1}\tilde\gamma_j^{-1}\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n\tilde A^*\tilde r_s.\tag{59}$$

Из (59) следует выражение для $\|\tilde z_k\|^2$:

$$\begin{aligned}\|\tilde z_k\|^2&=(z^{(1)},\tilde z_k)+\prod_{j=0}^{k-1}\tilde\gamma_j^{-1}(z^{(2)},\tilde z_k)-\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\prod_{j=i+1}^{k-1}\tilde\gamma_j^{-1}\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n(\tilde r_s,\tilde A\tilde z_k)=\\&=(z^{(1)},\tilde z_k)+\prod_{j=0}^{k-1}\tilde\gamma_j^{-1}(z^{(2)},\tilde z_k)-\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\prod_{j=i+1}^{k-1}\tilde\gamma_j^{-1}\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n(\tilde r_s,\tilde r_k+\tilde f-\tilde A\hat u).\end{aligned}$$

Заметим, что $\left\|\tilde A\hat u-\tilde f\right\|\le\eta\|\hat u\|+\delta=\Delta$. Используя неравенство Коши–Буняковского, очевидное неравенство $\prod\limits_{j=i+1}^{k-1}\tilde\gamma_j^{-1}\le 1$ и неравенство треугольника, получаем

$$
\begin{aligned}
\|\tilde z_k\|^2 &< \left|(z^{(1)},\tilde z_k)\right| + \left|(z^{(2)},\tilde z_k)\right| + \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i \prod_{j=i+1}^{k-1}\tilde\gamma_j^{-1}\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n \|\tilde r_s\| \left(\|\tilde r_k\|+\Delta\right) \le \\
&\le \left|(z^{(1)},\tilde z_k)\right| + \left|(z^{(2)},\tilde z_k)\right| + \\
&\quad + \tilde\omega_k^{-1/2}\left(\|\tilde r_k\|+\Delta\right)\sqrt{\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n\|\tilde r_s\|^2}.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Первые два слагаемых в правой части оценки (60) стремятся к нулю при $\sigma \to 0$ в силу слабой сходимости $u_{k(\sigma)} \rightharpoonup \hat u$. Для завершения доказательства осталось получить оценку третьего слагаемого.

На случай возмущенных данных переносятся некоторые формулы из доказательства теоремы 1, следующие из общих свойств метода. Так, неравенство (11) в условиях доказываемой теоремы имеет вид

$$
\begin{aligned}
\|\tilde z_n\|^2 - \|\tilde z_{n+1}\|^2 &\ge 2\tilde\tau_n\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=i}^{n-1}\tilde\beta_j\left[(\tilde z_i,\tilde A^*\tilde r_i) - \tilde\tau_i\|\tilde p_i\|^2\right] + \tilde\tau_n^2\|\tilde p_n\|^2 = \\
&= 2\tilde\tau_n\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{j=i}^{n-1}\tilde\beta_j\left[\|\tilde r_i\|^2 - \tilde\tau_i\|\tilde p_i\|^2 - (\tilde A\hat u - \tilde f,\tilde r_i)\right] + \\
&\quad + \tilde\tau_n\left[2\|\tilde r_n\|^2 - \tilde\tau_n\|\tilde p_n\|^2 - (\tilde A\hat u - \tilde f,\tilde r_n)\right].
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Из условия на параметр τ_k (57) $\gamma\|\tilde r_k\|^2 - \tilde\tau_k\|\tilde p_k\|^2 > 0$ следует неравенство $(1-\gamma)\|\tilde r_k\|^2 + \gamma\|\tilde r_k\|^2 - \tilde\tau_i\|\tilde p_i\|^2 > (1-\gamma)\|\tilde r_k\|^2$, используя которое совместно с неравенством Коши–Буняковского, из (61) получаем

$$
\begin{aligned}
\|\tilde z_n\|^2 - \|\tilde z_{n+1}\|^2 &\ge 2\tilde\tau_n\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{j=i}^{n-1}\tilde\beta_j\left[(1-\gamma)\|\tilde r_i\|^2 - (\tilde A\hat u - \tilde f,\tilde r_i)\right] + \\
&\quad + \tilde\tau_n\left[(2-\gamma)\|\tilde r_n\|^2 - (\tilde A\hat u - \tilde f,\tilde r_n)\right] > \\
&> 2(1-\gamma)\tilde\tau_n\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=i}^{n-1}\tilde\beta_j\|\tilde r_i\|^2 - 2\Delta\tilde\tau_n\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=i}^{n-1}\tilde\beta_j\|\tilde r_i\|.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Просуммируем неравенства (62) по n от 0 до $k-1$, тогда

$$
\begin{aligned}
\|z_0\|^2 - \|\tilde z_k\|^2 &> 2(1-\gamma)\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n\|\tilde r_s\|^2 - \\
&\quad - 2\Delta\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n\|\tilde r_s\|.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Последовательно применяя ко второму слагаемому в правой части (63) неравенство Коши–Буняковского и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $2\sqrt{\frac{1}{\epsilon}a\epsilon b} \le \frac{1}{\epsilon^2}a + \epsilon^2 b$, преобразуем второе слагаемое в правой части (63), тогда

$$\begin{aligned}
\|z_0\|^2 - \|\tilde z_k\|^2 &> 2(1-\gamma)\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n\|\tilde r_s\|^2 - \\
&\quad -2\Delta\tilde\omega_k^{-1/2}\sqrt{\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n\|\tilde r_s\|^2} \ge \\
&\ge 2(1-\gamma)\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n\|\tilde r_s\|^2 - \tfrac{1}{1-\gamma}\Delta^2\tilde\omega_k^{-1} - \\
&\quad -(1-\gamma)\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n\|\tilde r_s\|^2 = \\
&= (1-\gamma)\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n\|\tilde r_s\|^2 - \tfrac{1}{1-\gamma}\Delta^2\tilde\omega_k^{-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует оценка величины под знаком корня в правой части (60)

$$\sum_{i=0}^{k-1}\tilde\tau_i\sum_{s=0}^{i}\prod_{n=s}^{i-1}\tilde\beta_n\|\tilde r_s\|^2 < \tfrac{\|z_0\|^2}{1-\gamma} + \tfrac{1}{(1-\gamma)^2}\Delta^2\tilde\omega_k^{-1}. \tag{64}$$

Подставим (64) в (60), тогда с учетом неравенства $\sqrt{a^2+b^2} \le a+b$, $a \ge 0$, $b \ge 0$ получаем

$$\begin{aligned}
\|\tilde z_k\|^2 &< \left|(z^{(1)},\tilde z_k)\right| + \left|(z^{(2)},\tilde z_k)\right| + \\
&\quad +\tilde\omega_k^{-1/2}\left(\|\tilde r_k\|+\Delta\right)\sqrt{\tfrac{\|z_0\|^2}{1-\gamma} + \tfrac{1}{(1-\gamma)^2}\Delta^2\tilde\omega_k^{-1}} \le \\
&\le \left|(z^{(1)},\tilde z_k)\right| + \left|(z^{(2)},\tilde z_k)\right| + \\
&\quad +\tilde\omega_k^{-1/2}\left(\|\tilde r_k\|+\Delta\right)\left(\tfrac{\|z_0\|}{\sqrt{1-\gamma}} + \tfrac{1}{1-\gamma}\Delta\tilde\omega_k^{-1/2}\right).
\end{aligned} \tag{65}$$

Если зависимость $k(\sigma)$ выбрана в соответствии с условием теоремы, то в силу слабой сходимости $\tilde u_{k(\sigma)}$ правая часть (65) стремится к нулю и $\lim\limits_{\sigma\to 0}\left\|\tilde u_{k(\sigma)} - \hat u\right\| = 0$.

Теорема доказана.

Литература

[1] **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

[2] **Гилязов С.Ф., Черный В.В.** Регуляризирующий метод сопряженных градиентов для решения линейных операторных уравнений с самосопряженным оператором. См. настоящий сборник.

[3] **Гилязов С.Ф., Черный В.В.** О некоторых свойствах нелинейных отображений // Численный анализ: методы и алгоритмы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. С.19-23.