В.Г.Лежнев

# ВЫДЕЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ[1]

**Abstract**

Для любой $f(x)$ справедливо равенство $f(x) = g(x) + h(x)$, где $g(x)$ и $h(x)$ ортогональны в $L_2(Q)$ и $g(x)$ - гармоническая функция в $Q$. Рассматривается задача построения гармонической составляющей $g(x)$ функции $f(x)$.

Пусть $Q$ - ограниченная область с границей Ляпунова $S$, $S \in C^{1+\alpha}, \alpha > 0$. Обозначим $Q^+ = R^3 \setminus \bar{Q}$, $Q^- = Q$, обозначим также через $G(Q)$ подпространство в $L_2(G)$ состоящее из гармонических в $Q$ функций, а через $N(Q)$ – его ортогональное дополнение.

1. Справедлива следующая лемма [1].

Л е м м а Н о в и к о в а. Если $Q$ - ограниченная односвязная область, $S \in C^2$, то для $L_2(Q)$ имеет место разложение в прямую сумму

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q),$$

где $G(Q)$ - подпространство гармонических в $Q$ функций, а функция $g(y)$ принадлежит $N(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_Q \frac{g(y)}{|x-y|} dy = 0, \quad x \in S. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим множество функций $g(y)$ из $L_2(Q)$, удовлетворяющих условию (1),

$$\int_Q g(y) \frac{1}{|x-y|} dy = 0, \quad x \in S.$$

Множество этих функций является линейным, а также замкнутым в $L_2(Q)$. Обозначим это подпространство через $N(Q)$.

Рассмотрим ортогональное дополнение $G(Q)$ к $N(Q)$. Покажем, что любая функция из $G(Q)$ является гармонической в $Q$.

Возьмем бесконечно дифференцируемые и финитные в $Q$ функции $h(x)$,

$$h(x) \in \overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(Q), \quad \operatorname{supp} h(x) \subset\subset Q.$$

[1]Работа поддержана РФФИ, грант N 98-01-03628.

Функция $p(x) = \Delta h(x)$ принадлежит $N(Q)$, так как по формуле интегрального представления имеем [2]

$$h(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_Q p(y)\frac{1}{|x-y|}dy, \quad x \in Q,$$

и $h(x') = 0, x' \in S$.

Пусть $g(y) \in G(Q)$, тогда

$$\int_Q g(y)p(y)dy = \int_Q g(y)\Delta h(y)dy = 0 \quad \forall h(y) \in \overset{\bullet}{C}{}^{\infty}(Q).$$

Из этого тождества по $h(y)$ следует, что $g(y)$ - гармоническая в $Q$ функция ([2], с.208). Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е. Ограниченная последовательность точек $x^m, m = 1, 2, \dots,$ называется множеством, удовлетворяющем условию единственности гармонических функций в $R^3$, если равенства

$$u_1(x^m) = u_2(x^m), \quad m = 1, 2, \dots,$$

для функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$, гармонических в некоторой области $Q_1$, содержащей все точки $x^m$ вместе с их предельными, влекут тождество $u_1(x) \equiv u_2(x)$ в $Q_1$.

Пусть последовательность точек $x^m \in Q^+, m = 1, 2, \dots,$ удовлетворяет условию единственности гармонических функций в $R^3$, и $\{x^m\}$ отделена от границы $S$. Рассмотрим на $S$ следующую систему функций

$$\alpha_m(y) = \frac{1}{|x^m - y|}, \quad m = 1, 2, \dots.$$

Л е м м а 1. Система функций $\alpha_m(y), m = 1, 2, \dots,$ линейна независима и замкнута в $L_2(S)$.

Доказательство. Для доказательства замкнутости возьмем произвольную $g(y) \in L_2(S)$ и рассмотрим функцию

$$f(x) = \int_S g(y)\frac{1}{|x-y|}ds_y, \quad x \in Q^+.$$

Если $g(y)$ ортогональна в $L_2(S)$ всем $g_m(y)$, то $f(x^m) = 0, m = 1, 2, \dots,$ следовательно, $f(x) \equiv 0$ в $Q^+$.

Нормальная производная от $f(x)$ по внешней нормали в точке $x' \in S$ равна нулю, при этом [2]

$$\frac{\partial}{\partial n_x} f(x)\Big|_{x'} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial n_x} f(x)\right)^+\Big|_{x'} = \left(\int_S g(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-y|}ds_y\right)^+\Big|_{x'} =$$
$$= -2\pi g(x') + \int_S g(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x'-y|}ds_y.$$

Иными словами, мы имеем

$$g(x) - B^* g(x) = 0, \quad x \in S,$$

при этом для интегрального оператора

$$B^* h = \frac{1}{2\pi}\int_S h(y)\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x'-y|}ds_y, \quad x \in S,$$

число $\lambda = 1$ не является собственным [3]. Следовательно, $g(x) = 0$, замкнутость системы $\alpha_m(y)$ доказана.

Для доказательства линейной независимости предположим противное. Тогда существует номер $N$ такой, что

$$\alpha_N(y) = \sum_1^{N-1} c_m \alpha_m(y), \quad y \in S.$$

Это равенство выполняется тождественно при $y \in Q^-$ по принципу максимума для гармонических функций. Следовательно, тождество выполняется в любой области $Q_1 \supset \bar{Q}$, где функции справа и слева в нашем равенстве гармоничны. Но при $y \to x_N$ пределы правой и левой частей не совпадают. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Пуассона в области $Q$, $S \in C^2$:

$$\Delta u(x) = p(x), (x \in Q), \quad u|_S = 0. \tag{2}$$

Л е м м а 2. Если $u(x)$ - решение задачи (2), функция $p(x)$ принадлежит $N(Q)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = 0,$$

и выполняется равенство

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_Q \frac{p(y)}{|x-y|}dy, \quad x \in Q.$$

Доказательство. Решение $u(x)$ принадлежит $H^2(Q)$ и имеет место интегральное представление [2]

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_Q \frac{p(y)}{|x-y|}dy-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_S \left[u(y)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right] ds_y.$$

Первый из интегралов по $S$ обращается в нуль вследствие граничного условия (2). Перейдем на границу при $x \to x' \in S, x \in Q$. Так как $u(x') = 0$ и выполняется (1) при $g(y) = p(y)$, то в результате получим, что функция

$$w(x) := \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{|x-y|}\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}ds_y$$

тождественно равна нулю при $x \in S$.

Функция $w(x)$ является гармонической в $R^3 \setminus \bar{Q}$, обращается в нуль на границе $S$, следовательно, по принципу максимума

$$w(x) \equiv 0, \quad x \in R^3 \setminus \bar{Q}.$$

Возьмем в $R^3 \setminus \bar{Q}$ последовательность точек $x^m, m = 1, 2, \ldots,$ удовлетворяющую условию единственности, и положим $x = x^m$ в последнем тождестве. Полученные равенства можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial n_y}u(y), \alpha_m(y)\right)_{L_2(S)} = 0, m = 1, 2, \ldots.$$

Из леммы 1 следует первое утверждение леммы 2. Второе утверждение получается теперь непосредственно из интегрального представления для $u(x)$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Если $p(x) \in N(Q)$, функция $w(x)$ - решение в $Q$ задачи

$$\Delta w(x) = p(x), \quad \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_S = 0,$$

то $w(x) = 0$ при $x \in S$ и справедливо равенство

$$w(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_Q \frac{p(y)}{|x-y|}dy, \quad x \in \bar{Q}.$$

2. Пусть $f(x) \in L_2(Q)$ и $f(x) = g_0(x) + h_0(x)$, где $g_0 \in G(Q), h_0 \in N(Q)$. Если $f(x)$ достаточно гладкая, то указанное разложение может

быть получено с помощью решения следующей краевой задачи:

$$\Delta^2 v(x) = \Delta f(x) \quad (x \in Q), \quad v\Big|_S = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_S = 0.$$

Действительно, полагая $h_0 = \Delta v, \quad g_0 = f - h_0$, получим, что $\Delta g_0(x) = 0$ в $Q$ и

$$(h_0, g_0)_{L_2(Q)} = (\Delta v, g_0)_{L_2(Q)} = 0.$$

Далее для произвольной $f(x) \in L_2(Q)$ построим последовательность гармонических функций $g_0^N(x)$ таких, что

$$\lim_{N\to\infty} \|g_0^N - g_0\|_{L_2(Q)} = 0.$$

Обозначим $G^N(Q) = \{\alpha_m(x)\}_1^N$ подпространство в $L_2(Q)$, образованное первыми $N$ функциями $\alpha_m(x)$. Вследствие полноты в $G(Q)$ системы функций $\alpha_m(x), m = 1, 2, \ldots$, можно сказать, что подпространства $G^N(Q)$ исчерпывают $G(Q)$ при $N \to \infty, G^N(Q) \to G(Q)$, т.е. для любой $g(x) \in G(Q)$ ее проекция $g^N(x)$ на $G^N(Q)$ стремится к $g(x)$ при $N \to \infty$.

Вычислим значения

$$v^m := v(x^m) = \int_Q \frac{f(y)}{|x^m - y|} dy$$

и рассмотрим на $G^N(Q) \ni g^N(x)$ функционал

$$\Phi_{MN}(g^N) = \sum_{m=1}^{M} \left[ \int_Q \frac{g^N(y)}{|x^m - y|} dy - v^m \right]^2, \quad M \geq N,$$

и следующую вариационную задачу.

З а д а ч а V: найти

$$\mu = \inf_{G^N} \Phi_{MN}(g^n)$$

и минимизирующую функцию $g_0^N(x)$.

Можно доказать, что функционал $\Phi_{MN}$ строго выпуклый.

Т е о р е м а 1. Решение $g_0^N(x)$ задачи V существует и единственно.

Доказательство единственности следует из строгой выпуклости функционала $\Phi_{MN}$. Для доказательства существования представим $\Phi_{MN}(g^N)$ как функцию $F_{MN}(c)$ переменных $c = (c_1, \ldots, c_N)$. Необходимое условие экстремума, состоящее в обращении в нуль градиента $\nabla F_{MN}(c)$ в экстремальной точке $c^0 = (c_1^0, \ldots, c_N^0)$, приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$A^T A c = A^T b$$

с квадратной матрицей $A^T A$ порядка $N$. Системы такого вида разрешимы всегда. Теорема доказана.

Решения $g_0^N(x)$ аппроксимируют искомую гармоническую составляющую $g_0(x)$ функции $f(x)$. Положим для краткости $M = N$, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Если $M = N$, то справедливо равенство

$$\lim_{N \to \infty} \|g_0^N - g_0\|_{L_2(Q)} = 0.$$

Доказательство. Так как

$$v^m = (f, \alpha_m) = (g_0, \alpha_m),$$

то функционал $\Phi_{MN}$ может быть представлен в виде

$$\Phi_{MN}(g^N) = \sum_{m=1}^{N} (g^N - g_0, \alpha_m)^2.$$

Тогда решение $g_0^N(x)$ вариационной задачи V является проекцией функции $g_0(x)$ на подпространство $G^N(Q)$, откуда и следует утверждение теоремы.

## Литература


[1] **Новиков П.С.** Об единственности решения обратной задачи потенциала // ДАН СССР, 1938. Т.18. N3.

[2] **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1987.

[3] **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.