ВВЕДЕНИЕ

Пусть эллиптический дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ с постоянными вещественными коэффициентами имеет порядок l и зависит от n частных производных. Говорят, что распределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное открытое множество, удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\mathcal{L}u \geq 0, \tag{1.0}$$

если распределение $\Lambda = \mathcal{L}u$ положительно. Распределение $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется положительным, если оно принимает положительные значения на положительных пробных функциях $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Работа посвящена анализу эллиптических дифференциальных неравенств, понимаемых в указанном смысле теории распределений.

Классическим примером эллиптического дифференциального неравенства служит

$$\Delta u > 0, \tag{2.0}$$

где Δ – оператор Лапласа. Решения дифференциального неравенства (2.0) называются субгармоническими функциями. Изучению субгармонических функций посвящено много литературы, берущей свое начало с классических работ Рисса [1-3]. Подробная библиография имеется в работе [4].

Анализ дифференциального неравенства (1.0) мы будем осуществлять на двух уровнях. На первом уровне изучаются отдельные решения, и здесь основным средством будет их локальное представление, аналогичное локальному представлению Рисса для субгармонических функций. На втором уровне изучаются множества решений дифференциального неравенства (1.0), лежащие в тех или иных пространствах. По своей структуре эти множества являются линейными полугруппами. Линейной полугруппой называется непустое подмножество линейного пространства, замкнутое относительно сложения и умножения на положительные числа. Конусом будет называться линейная полугруппа, в которой нет нетривиальных линейных подпространств.

Разумеется, при изложении мы не будем проводить резкой границы между этими двумя уровнями. Тем более, что часто они взаимно дополняют друг друга. Например, анализ на первом уровне позволяет утверждать, что линейная полугруппа

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \mathcal{L}u \geq 0\}$$

решений дифференциального неравенства (1.0) в пространстве $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$ удовлетворяет включению

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset L_1(\Omega)^{\mathrm{loc}}.$$

В частности, поэтому каждое решение дифференциального неравенства (1.0) является функцией. Анализ на втором уровне позволяет дополнительно утверждать, что в действительности имеет место вложение

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subsetneq H_2^{l-n/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}},$$

где $s > 0$. Поэтому

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subsetneq L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}}$$

при $l > n/2$ и

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subsetneq C^{l-n-1}(\Omega),$$

при $l > n$.

Основным пространством, в котором будет рассматриваться дифференциальное неравенство (1.0), будет пространство $L_2(\Omega)$. При этом будет предполагаться, что $l > n/2$. В этом случае любое решение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ дифференциального неравенства (1.0) является функцией из пространства $L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}}$. Поэтому принадлежность функции u пространству $L_2(\Omega)$ фактически только ограничивает ее рост около границы $\mathrm{Fr}\,\Omega$ множества Ω.

Зададим

$$V_{\mathcal{L}}(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \mathcal{L}u \geq 0\}.$$

Легко видеть, что в пространстве $L_2(\Omega)$ множество $V_{\mathcal{L}}(\Omega)$ является замкнутой линейной полугруппой, представимой в виде прямой суммы

$$V_{\mathcal{L}}(\Omega) = P_{\mathcal{L}}(\Omega) \oplus K_{\mathcal{L}}(\Omega)$$

замкнутого линейного пространства

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \mathcal{L}u = 0\}$$

и замкнутого конуса

$$K_{\mathcal{L}}(\Omega) = \{u \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp} : Lu \geq 0\}.$$

Обозначим через $\overset{+}{W}{}^l_2(\Omega)$ конус положительных функций в пространстве $\overset{0}{W}{}^l{}_2(\Omega)$. Пространство $\overset{0}{W}{}^l{}_2(\Omega)$ получается в результате замыкания пространства пробных функций $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве Соболева $W_2^l(\Omega)$.

Будет доказано, что оператор

$$\check{\mathcal{L}} : \overset{+}{W}{}^l_2(\Omega) \longrightarrow V_{\mathcal{L}}(\Omega)^* \tag{3.0}$$

является линейным непрерывным изоморфизмом с непрерывным обратным. Здесь $V_{\mathcal{L}}(\Omega)^*$ – сопряженная полугруппа к линейной полугруппе $V_{\mathcal{L}}(\Omega)$, а $\check{\mathcal{L}}$ – сопряженный дифференциальный оператор к дифференциальному оператору $\mathcal{L}$.

В случае гладкой границы $\mathrm{Fr}\,\Omega$ конус $\overset{+}{W}{}^l_2(\Omega)$ является воспроизводящим:

$$\overset{0}{W}{}^l{}_2(\Omega) = \overset{+}{W}{}^l_2(\Omega) - \overset{+}{W}{}^l_2(\Omega) \tag{4.0}$$

(Отметим, что в работе [5] воспроизводимость конуса $\overset{+}{W}{}^l_2(\Omega)$ доказана в более общем случае области Ω с липшицевой границей.)

Поэтому из (3.0) и (4.0) следует, что

$$L_2(\Omega) = K_{\mathcal{L}}(\Omega)^* - K_{\mathcal{L}}(\Omega)^* \tag{5.0}$$

Отсюда на основании теоремы Крейна [6-7] о нормальности и воспроизводимости делаем вывод, что конус $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ – нормальный.

В пространстве $L_2(\Omega)$ нормальность конуса $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ эквивалентна неравенству

$$\cos[K_{\mathcal{L}}(\Omega)] = \inf_{u,v\in K_{\mathcal{L}}(\Omega)} \frac{(u,v)_{L_2(\Omega)}}{\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}} > -1. \tag{6.0}$$

Геометрический смысл этого неравенства заключается в том, что в конусе $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ угол между его двумя любыми векторами отделен от π величиной, независящей от выбора этих векторов.

Оказывается, что геометрические свойства конуса $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ тесно связаны с аналитическими свойствами функции Грина $G(x,y)$ дифференциального оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$ в области Ω. Эта связь возникает из-за того, что функция Грина $G(x,y)$ представима в виде

$$G(x,y) = (\gamma_x, \gamma_y)_{L_2(\Omega)},$$

где $\gamma_x, \gamma_y \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ – должным образом подобранные функции. Например, из (6.0) следует, что

$$G(x,y) \geq \cos[K_{\mathcal{L}}(\Omega)] G(x,x)^{1/2} G(y,y)^{1/2}, \quad x,y \in \Omega. \tag{7.0}$$

Более того, можно доказать, что неравенство

$$G(x, y) \geq 0, \quad x, y \in \Omega,$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\cos[K_{\mathcal{L}}(\Omega)] \geq 0.$$

На геометрическом языке это означает, что положительность функции Грина $G(x, y)$ эквивалентна остроугольности конуса $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$.

Из неравенства (7.0) вытекает интересное следствие, имеющее связь с известной гипотезой, традиционно называемой гипотезой Адамара.

В своей работе [8] Адамар выдвинул предположение о том, что дифференциальный оператор Δ^2 в любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ имеет положительную функцию Грина $G(x, y)$. При фиксированной точке $y \in \Omega$ функция Грина $G(x, y)$ задает положение упругой пластины, зажатой на границе $\mathrm{Fr}\,\Omega$ и приподнятой в точке y. Как подсказывает интуиция, такая пластина должна приподняться во всех точках $x \in \Omega$. Поэтому неравенство

$$G(x, y) \geq 0 \tag{8.0}$$

выглядит достаточно правдоподобно по крайней мере для выпуклых областей Ω. Однако в работе [8] это физически правдоподобное утверждение доказано не было.

Отдавая дань исторической справедливости, следует отметить, что вопрос о положительности функции Грина оператора Δ^2 поднимался и в более ранних работах, на которые и ссылается Адамар. Так, в работе [9] доказана положительность функции Грина $G(x, y)$ для круга, а в работе [10] доказано неравенство $G(x, x) \geq 0$ для произвольной области Ω. Однако в своей работе [8] Адамар отмечает неравенство

$$G(x, y) \geq -G(x, x)^{1/2} G(y, y)^{1/2}, \quad x, y \in \Omega,$$

непосредственно следующее из неравенства Коши.

Впоследствии оказалось, что гипотеза Адамара неверна. Различные контрпримеры к гипотезе Адамара были построены в работах [11-14]. Наиболее простой контрпример к этой гипотезе был построен в работе Гарабедиана [12], в этой работе было доказано, что функция Грина $G(x, y)$ меняет знак в достаточно узком эллипсе. Однако и после отрицательного решения интерес к данной проблематике не пропал [15,16].

Отметим, что на основании вышеизложенного следует, что утверждение о положительности функции Грина оператора Δ^2 эквивалентно утверждению об остроугольности конуса субгармонических функций $K_\Delta(\Omega)$. В частности, построенные к гипотезе Адамара контрпримеры показывают, что конус субгармонических функций $K_\Delta(\Omega)$ может быть неостроугольным. Поэтому возникает естественный вопрос о геометрических свойствах конуса $K_\Delta(\Omega)$. Частичный ответ на этот вопрос уже дан: выше было указано, что для области Ω с гладкой границей конус $K_\Delta(\Omega)$ является нормальным. В частности, поэтому для функции Грина справедливо следующее неравенство

$$G(x,y) \geq (\varepsilon - 1) G(x,x)^{1/2} G(y,y)^{1/2}, \quad x, y \in \Omega,$$

где

$$\varepsilon = 1 + \cos[K_\Delta(\Omega)] > 0,$$

усиливающее неравенство, полученное Адамаром в работе [8].

Заканчивая это небольшое введение, сделаем несколько общих замечаний о структуре работы и основных обозначениях.

Работа состоит из трех разделов, каждый из которых образован из семи параграфов. Параграфы имеют сквозную нумерацию. Первый и второй разделы носят вспомогательный характер. В них излагаются необходимые для дальнейшего сведения о линейных полугруппах в гильбертовом пространстве, дифференциальных операторах и пространствах Соболева. Эллиптическим дифференциальным неравенствам и их приложениям в задачах аппроксимации и фильтрации посвящен третий раздел.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathbb{R}^n$ – вещественное n-мерное пространство,

$\mathbb{C}^n$ – комплексное n-мерное пространство,

$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ – единичный шар,

$\mathbb{D}^n(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ – шар радиусом r с центром в x_0,

$\mathbb{P}$ – вероятность,

$\mathbb{M}$ – математическое ожидание,

$\mathbb{D}$ – дисперсия,

$\operatorname{Cl} A$ – замыкание множества A,

$\operatorname{Int} A$ – внутренность множества A,

$\operatorname{Fr} A$ – граница множества A,

∂A – край гладкого многообразия A,

$\operatorname{co} A$ – коническая оболочка множества A,

$\operatorname{conv} A$ – выпуклая оболочка множества A,

$\int$ - интеграл без пределов означает интеграл по $\mathbb{R}^n$,

C - константа, которой для удобства оценок позволено менять значение от формулы к формуле.