Глава I

ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛУГРУППЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе излагаются необходимые сведения о линейных полугруппах в гильбертовом пространстве. Все сформулированные в этом разделе утверждения элементарны, геометрически очевидны и в основном касаются оператора проектирования на выпуклое множество. Фактически для их понимания достаточно знать только определение гильбертова пространства и его простейшие свойства. Небольшим исключением является четвертый параграф, в котором для гильбертова случая доказывается теорема Крейна о нормальности и воспроизводимости, и седьмой параграф, в котором требуются некоторые факты из теории вероятностей. В доказательстве теоремы Крейна неявным образом присутствует теорема Банаха–Штейнгауза [17], необходимые факты из теории вероятностей изложены в [18]. Многие из доказанных в этом разделе утверждений в более общем виде имеются во многих работах, посвященных экстремальным задачам. При всем желании перечислить эти работы невозможно, поэтому ограничимся только ссылками на [19-21].

§1. Линейные полугруппы

В работе доминирующую роль будут играть неравенства, поэтому, если не оговорено противное, все линейные пространства предполагаются вещественными.

Пусть H – линейное топологическое пространство. Непустое подмножество $V \subset H$ называется линейной полугруппой, если из включений $u \in V$ и $v \in V$ следует включение $u + v \in V$, а из неравенства $\lambda \geq 0$ и включения $u \in V$ следует включение $\lambda u \in V$. Из определения линейной полугруппы V следует, что множество V выпукло. Линейная полугруппа K называется конусом, если из включений $u \in K$ и $-u \in K$ следует равенство $u = 0$. Итак, в линейной полугруппе могут, а в конусе не могут содержаться линейные подпространства.

Пусть $K \subset H$ – конус. Тогда в пространстве H можно ввести частичный порядок $\leq$ по правилу: $u \leq v$ тогда и только тогда, когда

$v - u \in K$. Строгое неравенство $u < v$ используется в том случае, когда $u \leq v$ и $u \neq v$. Через $\{u, v\}$ обозначается открытый отрезок с началом в точке u и концом в точке v:

$$\{u, v\} = \{x \in H : u < x < v\}.$$

Линейная полугруппа V называется воспроизводящей, если

$$H = V - V.$$

Воспроизводимость линейной полугруппы V означает, что для любого $u \in H$ существуют такие $u_+, u_- \in V$, что $u = u_+ - u_-$.

Пусть H^* – сопряженное пространство к пространству H. Напомним, что векторами сопряженного пространства H^* являются линейные непрерывные функционалы, заданные на пространстве H. Значение функционала $\Lambda \in H^*$ на векторе $u \in H$ будет обозначаться через (Λ, u). В сопряженном пространстве H^* стандартным образом вводится слабая сходимость. А именно, считается, что

$$\Lambda = \lim_{n \to \infty} \Lambda_n$$

в пространстве H^*, если

$$(\Lambda, u) = \lim_{n \to \infty} (\Lambda_n, u)$$

для любого вектора $u \in H$.

Через V^* будет обозначаться множество линейных функционалов $\Lambda \in H^*$, удовлетворяющих при всех $u \in V$ неравенству $(\Lambda, u) \geq 0$. Множество V^* является линейной полугруппой, которая будет называться сопряженной полугруппой к линейной полугруппе V. Очевидно, что сопряженная полугруппа V^* замкнута в слабой топологии сопряженного пространства H^*.

Пусть $V \subset H$ – непустое выпуклое подмножество. Фиксируем точку $u_0 \in V$. Множество векторов вида $\lambda(u - u_0)$, где $\lambda \geq 0$ и $u \in V$, является линейной полугруппой, которая называется полугруппой возможных направлений в точке u_0 и обозначается $V\{u_0\}$. В дальнейшем особую роль будет играть сопряженная полугруппа $V\{u_0\}^*$.

Пусть линейное топологическое пространство H является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$. В этом случае сопряженное пространство H^* может быть отождествлено с исходным пространством H. А именно, для любого линейного непрерывного функционала $\Lambda \in H$ существует единственный вектор f, такой, что $(\Lambda, u) = (f, u)_H$ при всех $u \in H$. Пусть $P \subset H$ – линейное подпространство. Через $P^\perp$ будет обозначаться ортогональное дополнение к подпространству P в пространстве H.

Пусть V – линейная полугруппа в гильбертовом пространстве H. Тогда сопряженная полугруппа V^* является подмножеством пространства H. А именно,

$$V^* = \bigcap_{v \in V} \{u \in H : (u, v)_H \geq 0\}.$$

Из этого равенства следует, что сопряженная полугруппа замкнута в гильбертовом пространстве H.

Т е о р е м а 1.1. *Замкнутая линейная полугруппа V в гильбертовом пространстве H представима в виде прямой суммы*

$$V = P \oplus K$$

замкнутого линейного подпространства $P = V \cap (-V)$ и замкнутого конуса $K = V \cap P^\perp$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оба множества $V \cap (-V)$ и $V \cap P^\perp$ являются замкнутыми линейными полугруппами. Из включения $u \in P$ следует включение $-u \in P$, поэтому линейная полугруппа P является линейным подпространством. Из включений $u \in K$ и $-u \in K$ следует, что $u \in P$ и $u \in P^\perp$. Поэтому $u = 0$. Отсюда следует, что линейная полугруппа K является конусом. Из замкнутости линейного подпространства P следует, что $H = P \oplus P^\perp$. Поэтому окончательно имеем:

$$V = V \cap H = V \cap (P \oplus P^\perp) = (V \cap P) \oplus (V \cap P^\perp) = P \oplus K. \quad \blacksquare$$

§2. Проекция на выпуклое множество

Для упрощения обозначений скалярное произведение и норму в гильбертовом пространстве H будем обозначать $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ без упоминания H.

Пусть в пространстве H задано непустое замкнутое выпуклое подмножество V.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть $u_0 \in H$. Задача минимизации*

$$\|u - u_0\| \xrightarrow[u \in V]{} \min \tag{1.2}$$

имеет единственное решение $u^0 \in V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Существование.* При доказательстве можно считать, что $u_0 = 0$. Обозначим

$$\rho = \inf\{\|u\| : u \in V\}.$$

Пусть $u, v \in V$. Тогда из включения $(u+v)/2 \in V$ следует неравенство $\|u+v\|^2 \geq 4\rho^2$. Поэтому

$$\|u+v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 - \|u-v\|^2 \leq 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 - 4\rho^2.$$

Пусть $u_1, u_2, \ldots$ – такая последовательность в множестве V, что

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|,$$

тогда

$$\|u_i - u_j\|^2 = 2\|u_i\|^2 + 2\|u_j\|^2 - 4\rho^2,$$

поэтому последовательность $u_1, u_2 \ldots$ фундаментальна. Из полноты гильбертова пространства H следует существование такой точки $u^0 \in H$, что

$$u^0 = \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Из замкнутости множества V следует, что $u^0 \in V$.

Единственность. Допустим, что $v^0 \in V$ и $\|v^0\| = \rho$. Тогда

$$\|u^0 - v^0\|^2 = 2\|u^0\|^2 + 2\|v^0\|^2 - 4\rho^2.$$

Поэтому $u^0 = v^0$. ■

Из теоремы 1.2 следует, что отображение

$$\mathfrak{P}_V : H \longrightarrow V,$$

сопоставляющее точке $u_0 \in H$ решение $u^0 \in V$ задачи минимизации (1.2), корректно определено. Отображение $\mathfrak{P}_V$ называется оператором проектирования. Очевидно, что

$$\mathfrak{P}_V(u) = u, \quad u \in V.$$

Докажем, что оператор проектирования $\mathfrak{P}$ является сжимающим отображением.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть $u_0 \in H$ и $u_1 \in H$. Имеет место неравенство*

$$\|\mathfrak{P}_V(u_0) - \mathfrak{P}_V(u_1)\| \leq \|u_0 - u_1\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathfrak{P}_V(u_0) = \mathfrak{P}_V(u_1)$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $\mathfrak{P}_V(u_0) \neq \mathfrak{P}_V(u_1)$. Обозначим через L прямую, проходящую через точки $\mathfrak{P}_V(u_0)$ и $\mathfrak{P}_V(u_1)$. Очевидно, что

$$\|\mathfrak{P}_L(u_0) - \mathfrak{P}_L(u_1)\| \leq \|u_0 - u_1\|.$$

Точки $\mathfrak{P}_V(u_0)$ и $\mathfrak{P}_V(u_1)$ лежат в отрезке $[\mathfrak{P}_L(u_0), \mathfrak{P}_L(u_1)]$. Поэтому

$$\|\mathfrak{P}_V(u_0) - \mathfrak{P}_V(u_1)\| \leq \|\mathfrak{P}_L(u_0) - \mathfrak{P}_L(u_1)\| \leq \|u_0 - u_1\|. \quad ■$$

Т е о р е м а 3.2. *Пусть $u_0 \in H$. Вектор $u^0 \in V$ является решением задачи минимизации (1.2) тогда и только тогда, когда*

$$u^0 \in u_0 + V\{u^0\}^*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть вектор $u^0 \in V$ является решением задачи минимизации (1.2). Если $v \in V\{u^0\}$, то $u^0 + \lambda v \in V$ при всех достаточно малых $\lambda > 0$. Поэтому

$$\|u^0 - u_0\|^2 \le \|u^0 + \lambda v - u_0\|^2 = \|u^0 - u_0\|^2 + 2\lambda(v, u^0 - u_0) + \lambda^2\|v\|^2.$$

Отсюда следует, что

$$(v, u^0 - u_0) \ge -\lambda\|v\|^2/2.$$

Из произвольности числа $\lambda > 0$ следует, что $(v, u^0 - u_0) \ge 0$. Из произвольности вектора $v \in V\{u^0\}$ следует, что $u^0 - u_0 \in V\{u^0\}$.

Достаточность. Пусть $u^0 \in u_0 + V\{u^0\}^*$, однако существует такой вектор $w \in V$, что $\|w - u_0\| < \|u^0 - u_0\|$. Тогда

$$\|w - u^0 + u^0 - u_0\|^2 < \|u^0 - u_0\|^2,$$

поэтому

$$(w - u^0, u^0 - u_0) < -\|w - u^0\|/2.$$

Однако имеет место включение $w - u^0 \in V\{u^0\}$, поэтому

$$(w - u^0, u^0 - u_0) \ge 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что вектор u^0 является решением задачи минимизации (1.2). ■

Изучим теперь дифференциальные свойства оператора проектирования $\mathfrak{P}_V$.

Пусть задано отображение $F : H \longrightarrow H$. Отображение F называется дифференцируемым по направлению $\xi \in H$ в точке $u \in H$, если существует предел

$$F'_u(\xi) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(u + \lambda\xi) - F(u)}{\lambda}.$$

Пусть отображение F в точке $u \in H$ дифференцируемо по любому направлению $\xi \in H$. Тогда возникает отображение

$$F'_u : H \longrightarrow H,$$

сопоставляющее вектору $\xi \in H$ вектор $F'_u(\xi)$.

Т е о р е м а 4.2. *Пусть отображение $F : H \longrightarrow V$ дифференцируемо по всем направлениям в точке $u \in H$ и удовлетворяет условиям*

$$F(u) = u, \quad u \in V,$$
$$\|F(u) - F(v)\| \le \|u - v\|, \quad u, v \in H.$$

Тогда отображение $F'_u : H \longrightarrow \operatorname{Cl} V\{u\}$ *удовлетворяет условиям*

$$F'_u(\xi) = \xi, \quad \xi \in \operatorname{Cl} V\{u\},$$
$$\|F'_u(\xi) - F'_u(\eta)\| \le \|\xi - \eta\|, \quad \xi, \eta \in H.$$

Доказательство. Пусть $\xi \in H$. Докажем, что $F'_u(\xi) \in \operatorname{Cl} V\{u\}$. Действительно, $F(u + \lambda\xi) \in V$, а $F(u) = u$, поэтому

$$F'_u(\xi) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(u + \lambda\xi) - F(u)}{\lambda} \in \operatorname{Cl} V\{u\}.$$

Пусть $\xi \in \operatorname{Cl} V\{u\}$. Докажем, что $F'_u(\xi) = \xi$. Действительно, из включения $\xi \in \operatorname{Cl} V\{u\}$ следует существование такой последовательности векторов $\{v_1, v_2, \ldots\} \subset V$ и таких чисел $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \ldots$, что

$$\xi = \lim_{n \to \infty} \frac{v_n - u}{\lambda_n}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$$

и $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$. Зададим

$$v(\lambda) = u + \frac{\lambda}{\lambda_n}(v_n - u)$$

при $\lambda \in (\lambda_{n+1}, \lambda_n]$. Очевидно,

$$\frac{v(\lambda) - u}{\lambda} = \frac{v_n - u}{\lambda_n},$$

поэтому

$$\xi = \lim_{\lambda \to 0} \frac{v(\lambda) - u}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \frac{F(u + \lambda\xi) - F(u)}{\lambda} - \xi \right\| = \frac{1}{\lambda} \|F(u + \lambda\xi) - (u + \lambda\xi)\| \le$$
$$\frac{1}{\lambda} \|F(u + \lambda\xi) - F(v(\lambda))\| + \frac{1}{\lambda} \|F(v(\lambda)) - (u + \lambda\xi)\| \le$$
$$\frac{1}{\lambda} \|(u + \lambda\xi) - v(\lambda)\| + \frac{1}{\lambda} \|v(\lambda) - (u + \lambda\xi)\| = 2 \left\| \xi - \frac{v(\lambda) - u}{\lambda} \right\|,$$

поэтому $F'_u(\xi) = \xi$.

Пусть $\xi, \eta \in H$. Докажем, что

$$\|F'_u(\xi) - F'_u(\eta)\| \le \|\xi - \eta\|.$$

Действительно,

$$\|\xi - \eta\| \ge \left\| \frac{F(u+\lambda\xi) - F(u+\lambda\eta)}{\lambda} \right\| =$$
$$\left\| \frac{F(u+\lambda\xi) - u}{\lambda} - \frac{F(u+\lambda\eta) - u}{\lambda} \right\| \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \|F'_u(\xi) - F'_u(\eta)\|,$$

что и требовалось доказать. ■

Т е о р е м а 5.2. *Для любой точки $u \in V$ оператор проектирования $\mathfrak{P}_V$ дифференцируем по всем направлениям $\xi \in H$ и*

$$(\mathfrak{P}_V)'_u = \mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V\{u\}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\xi \in H$. Требуется доказать, что

$$\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V\{u\}}(\xi) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\mathfrak{P}_V(u+\lambda\xi) - \mathfrak{P}_V(u)}{\lambda}.$$

Отметим еще раз, что $\mathfrak{P}_V(v) = v$ при $v \in V$.

1) Пусть $\xi \in \mathrm{Cl}\, V\{u\}$. Тогда

$$\xi = \lim_{\lambda\to 0} \frac{v(\lambda) - u}{\lambda},$$

где вектор $v(\lambda)$ определен в доказательстве теоремы 4.2. Итак,

$$\left\| \frac{\mathfrak{P}_V(u+\lambda\xi) - u}{\lambda} - \xi \right\| = \frac{1}{\lambda}\|\mathfrak{P}_V(u+\lambda\xi) - (u+\lambda\xi)\| \le$$
$$\frac{1}{\lambda}\|v(\lambda) - (u+\lambda\xi)\| = \left\| \frac{v(\lambda) - u}{\lambda} - \xi \right\| \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0,$$

поэтому

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\mathfrak{P}_V(u+\lambda\xi) - u}{\lambda} = \xi = \mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V\{u\}}(\xi).$$

2) Пусть $\xi \in H$ – произвольный элемент. Зададим

$$a = u + \lambda\xi, \quad b = u + \lambda\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V\{u\}}(\xi), \quad c = \mathfrak{P}_V(a), \quad d = \mathfrak{P}_V(b).$$

Векторы a, b, c, d зависят от $\lambda > 0$, однако из соображений удобства эта зависимость явно указываться не будет.

Из неравенства

$$(d-c, c-a) \geq 0$$

следует оценка

$$\|d-c\|^2 \leq \|d-a\|^2 - \|c-a\|^2 \leq (\|d-b\| + \|b-a\|)^2 - \|c-a\|^2 = \|d-b\|^2 + 2\|d-b\|\|b-a\| + \|b-a\|^2 - \|c-a\|^2.$$

Из включения $V \subset u + \mathrm{Cl}\, V\{u\}$ следует неравенство

$$\|b-a\| \leq \|c-a\|,$$

поэтому

$$\|d-c\|^2 \leq \|d-b\|^2 + 2\|d-b\|\|b-a\|.$$

Так как

$$\|d-b\| = \mathrm{o}(\lambda), \quad \|b-a\| = \|\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V\{u\}}(\xi) - \xi\|,$$

то

$$\left\| \frac{\mathfrak{P}_V(u+\lambda\xi) - u}{\lambda} - \mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V\{u\}}(\xi) \right\| = \frac{1}{\lambda} \left\| \mathfrak{P}_V(u+\lambda\xi) - (u + \lambda\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V\{u\}}(\xi)) \right\| = \frac{1}{\lambda}\|c_b\| \leq \frac{1}{\lambda}(\|c-d\| + \|d-b\|) \leq \frac{(\|d-b\|^2 + 2\|d-b\|\|d-a\|)^{1/2} + \|d-b\|}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0.$$

Равенство $(\mathfrak{P}_V)'_u(\xi) = \mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V\{u\}}(\xi)$ доказано. ■

Из теоремы 5.2 следует, что в точке $u \in V$ оператор проектирования $\mathfrak{P}_V$ близок к оператору проектирования $\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V\{u\}}$. Отметим, что множество $\mathrm{Cl}\, V\{u\}$ является замкнутой линейной полугруппой.

§3. Проекция на линейную полугруппу

Пусть в гильбертовом пространстве H задана линейная полугруппа $V \subset H$. Тогда оператор проектирования является положительно однородным отображением

$$\mathfrak{P}_V(\lambda u) = \lambda \mathfrak{P}_V(u)$$

при всех $\lambda \geq 0$ и $u \in H$.

Из теоремы 1.1 следует, что линейную полугруппу V можно представить в виде прямой суммы $V = P \oplus K$ замкнутого линейного подпространства $P = V \cap (-V)$ и замкнутого конуса $K = V \cap P^{\perp}$. Конус K расположен в ортогональном дополнении $P^{\perp}$ к подпространству P, поэтому оператор проектирования $\mathfrak{P}_V$ можно представить в виде

$$\mathfrak{P}_V = \mathfrak{P}_P + \mathfrak{P}_K.$$

Оператор проектирования $\mathfrak{P}_P$ на линейное подпространство P является линейным отображением. Поэтому вся нелинейность отображения $\mathfrak{P}_V$ содержится в операторе проектирования $\mathfrak{P}_K$ на конус K.

Для замкнутой линейной полугруппы V теорема 3.2 получает следующую модификацию.

Т е о р е м а 1.3. *Пусть $u_0 \in H$. Вектор $u^0 \in V$ является решением задачи минимизации*

$$\|u - u_0\| \underset{u \in V}{\longrightarrow} \min \tag{1.3}$$

тогда и только тогда, когда $u^0 \in u_0 + V^*$ и $(u^0 - u_0, u^0) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть вектор $u^0 \in V$ является решением указанной задачи. Зададимся вектором $v \in V$. Очевидно, что $u^0 + \lambda v \in V$ при всех $\lambda \geq 0$, поэтому точка $\lambda = 0$ является точкой минимума функции

$$f(\lambda) = \|u^0 + \lambda v - u_0\|^2 = \|u^0 - u_0\|^2 + 2\lambda(u^0 - u_0, v) + \lambda^2\|v\|^2$$

на полупрямой $[0, \infty)$. Отсюда следует, что $(u^0 - u_0, v) \geq 0$. Из произвольности вектора $v \in V$ следует, что $u^0 - u_0 \in V^*$.

Докажем теперь равенство $(u^0 - u_0, u^0) = 0$. При $u^0 = 0$ это равенство очевидно. При $u^0 \neq 0$ это равенство следует из того факта, что точка u^0 реализует расстояние от точки u_0 до одномерного подпространства, порожденного вектором u^0.

Достаточность. Пусть вектор $u^0 \in V$ удовлетворяет включению $u^0 \in u_0 + V^*$ и имеет место равенство $(u^0 - u_0, u^0) = 0$. Докажем, что

$u^0 \in u_0 + V\{u^0\}^*$. Пусть $v \in V\{u^0\}$. Тогда точка $w_\lambda = u^0 + \lambda v$ при достаточно малых $\lambda > 0$ принадлежит V, поэтому

$$(u^0 - u_0, v) = \frac{1}{\lambda}(u^0 - u_0, w_\lambda - u^0) = \frac{1}{\lambda}(u^0 - u_0, w_\lambda) \geq 0.$$

Из произвольности $v \in V\{u^0\}$ следует, что $u^0 - u_0 \in V\{u^0\}^*$. Остается применить теорему 3.2. ■

Т е о р е м а 2.3. *Имеет место равенство* $(V^*)^* = V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $V \subset (V^*)^*$ очевидно. Покажем, что $(V^*)^* \subset V$. Пусть $u_0 \in (V^*)^*$ и $u^0 = \mathfrak{P}_V(u_0)$. Из теоремы 1.3 следует, что $(u^0, u^0 - u_0) = 0$ и $(u_0, u^0 - u_0) \geq 0$, поэтому

$$(u^0 - u_0, u^0 - u_0) = (u^0, u^0 - u_0) - (u_0, u^0 - u_0) \leq 0.$$

Из полученного неравенства следует, что $\|u^0 - u_0\|^2 = 0$. Поэтому $u^0 = u_0$. Отсюда следует, что $u_0 \in V$. ■

Т е о р е м а 3.3. *Вектор* u^0 *является решением задачи минимизации (1.3) тогда и только тогда, когда он является решением задачи минимизации*

$$\|u\| \xrightarrow[u \in u_0 + V^*]{} \min. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что вектор u^0 является решением задачи минимизации (2.3) тогда и только тогда, когда вектор $u^0 - u_0$ является решением задачи минимизации

$$\|u + u_0\| \xrightarrow[u \in V^*]{} \min. \tag{3.3}$$

Необходимость. Пусть вектор u_0 является решением задачи минимизации (1.3). Из теоремы 1.3 следует, что вектор u^0 ортогонален вектору $u^0 - u_0$. Поэтому вектор $(u^0 - u_0) + u_0$ ортогонален вектору $u^0 - u_0$. Из включения $u^0 \in V$ следует, что $u^0 - u_0 \in -u_0 + V$. Однако $V = (V^*)^*$, поэтому $u^0 - u_0 \in -u_0 + (V^*)^*$ и из теоремы 1.3 следует, что вектор $u^0 - u_0$ является решением задачи минимизации (3.3).

Достаточность. Пусть вектор $u^0 - u_0$ является решением задачи минимизации (3.3). Из теоремы 1.3 следует, что вектор $(u^0 - u_0) + u_0$ ортогонален вектору $u^0 - u_0$. Поэтому вектор u^0 ортогонален вектору $u^0 - u_0$. Из включения $u^0 - u_0 \in V^*$ и теоремы 1.3 следует, что вектор u^0 является решением задачи (1.3). ■

С л е д с т в и е. *Из теоремы 3.3 следует, что*

$$\mathfrak{P}_V(u) = u + \mathfrak{P}_{V^*}(-u) \tag{4.3}$$

при всех $u \in H$ *и*

$$\|\mathfrak{P}_V(u_0)\| \leq \|u\| \tag{5.3}$$

при всех $u \in u_0 + V^*$.

Поскольку равенство (4.3) в дальнейшем будет часто использоваться, удобно ввести оператор $\check{\mathfrak{P}}_V(u) = \mathfrak{P}_V(-u)$. Тогда

$$\mathfrak{P}_V(u) = u + \check{\mathfrak{P}}_{V^*}(u).$$

Т е о р е м а 4.3. *Пусть* $u_0 \in H$ *и* $v_0 \in H$. *Тогда*

$$\|\mathfrak{P}_V(u_0 + v_0)\| \le \|\mathfrak{P}_V(u_0)\| + \|\mathfrak{P}_V(v_0)\|. \tag{6.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть u^0, v^0, w^0 – решения задачи минимизации

$$\|u\| \longrightarrow \min$$

при условиях

$$u \in u_0 + V^*,$$
$$u \in v_0 + V^*,$$
$$u \in u_0 + v_0 + V^*$$

соответственно. Легко видеть, что $V^* + V^* \subset V^*$. Поэтому имеет место включение $u^0 + v^0 \in u_0 + v_0 + V^*$, из которого следует, что

$$\|w^0\| \le \|u^0 + v^0\| \le \|u^0\| + \|v^0\|.$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из равенств

$$\|\mathfrak{P}_V(u_0)\| = \|u^0\|,$$
$$\|\mathfrak{P}_V(v_0)\| = \|v^0\|,$$
$$\|\mathfrak{P}_V(u_0 + v_0)\| = \|w^0\|.$$

Неравенство (6.3) доказано. ■

Т е о р е м а 5.3. *Пусть* $u_* \in V$ *и* $\xi \in H$, *тогда*

$$\|\mathfrak{P}_V(u_* + \xi) - u_*\| \le (u_*, \mathfrak{P}_V(\xi) - \xi)^{1/2} + \|\mathfrak{P}_V(\xi)\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть

$$u_0 = u_* + \xi,$$
$$u^0 = \mathfrak{P}_V(u_0),$$
$$u = u_* + \mathfrak{P}_V(\xi).$$

Очевидно, что $u \in V \cap (u_0 + V^*)$, поэтому $(u, u^0 - u_0) \ge 0$ и $(u^0, u - u_0) \ge 0$. Однако

$$(u, u - u_0) = \|u - u^0\|^2 + (u, u^0 - u_0) + (u^0, u - u_0) \ge \|u - u^0\|^2,$$

поэтому

$$\|u-u^0\| \le (u, u-u_0)^{1/2}$$

Отсюда следует, что

$$\|\mathfrak{P}_V(u_*+\xi)-u_*\| = \|u^0-u+\mathfrak{P}_V(\xi)\| \le$$
$$\|u^0-u\| + \|\mathfrak{P}_V(\xi)\| = (u, u-u_0)^{1/2} + \|\mathfrak{P}_V(\xi)\| =$$
$$(u_*+\mathfrak{P}_V(\xi), \mathfrak{P}_V(\xi)-\xi)^{1/2} + \|\mathfrak{P}_V(\xi)\| = (u_*, \mathfrak{P}_V(\xi)-\xi)^{1/2} + \|\mathfrak{P}_V(\xi)\|.$$

Неравенство (7.3) доказано. ■

Т е о р е м а 6.3. *Пусть $u_* \in V$ и $\xi \in H$, тогда функция*

$$f_V(\lambda) = \|\mathfrak{P}_V(\lambda u_*+\xi) - \lambda u_*\|$$

возрастает при $\lambda \ge 0$ и имеет место предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} f_V(\lambda) = \|\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\,V\{u_*\}}(\xi)\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P \subset H$ – замкнутое подпространство. Докажем, что функция $f_P(\lambda)$ возрастает при $\lambda \ge 0$. Действительно, из линейности оператора $\mathfrak{P}_P$ имеем

$$f_P(\lambda)^2 = \|\lambda\mathfrak{P}_P(u_*) + \mathfrak{P}_P(\xi) - \lambda u_*\|^2 =$$
$$\|\lambda(\mathfrak{P}_P(u_*)-u_*) + \mathfrak{P}_P(\xi)\|^2 = \lambda^2\|(\mathfrak{P}_P(u_*)-u_*\|^2 + \|\mathfrak{P}_P(\xi)\|^2.$$

Пусть теперь $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$. Положим

$$u_1 = \mathfrak{P}_V(\lambda_1 u_* + \xi),$$
$$u_2 = \mathfrak{P}_V(\lambda_2 u_* + \xi)$$

и обозначим через W линейную полугруппу, образованную из векторов вида

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3,$$

где $\alpha_1 \ge 0$, $\alpha_2 \ge 0$, $\alpha_3 \ge 0$, а $u_3 = u_*$. Очевидно, что $W \subset V$. Поэтому

$$u_1 = \mathfrak{P}_W(\lambda_1 u_* + \xi),$$
$$u_2 = \mathfrak{P}_W(\lambda_2 u_* + \xi).$$

Отсюда следует, что $f_V(\lambda_1) = f_W(\lambda_1)$ и $f_V(\lambda_2) = f_W(\lambda_2)$.

Докажем, что

$$f_W(\lambda_1) \le f_W(\lambda_2). \tag{8.3}$$

Ранг системы векторов $\{u_1, u_2, u_3\}$ может быть равен 0, 1, 2 или 3, поэтому линейная полугруппа W может быть одним из следующих множеств: точкой, прямой, плоскостью, полупрямой, полуплоскостью, двумерным конусом или трехмерным конусом. В первых трех случаях оператор проектирования $\mathfrak{P}_W$ есть оператор проектирования на замкнутое линейное подпространство, поэтому неравенство (8.3) доказано выше. В последних четырех случаях оператор $\mathfrak{P}_W$ кусочно-линеен. Однако, очевидно, что из справедливости утверждения в линейном случае следует его справедливость в кусочно-линейном.

Итак, функция $f_V(\lambda)$ возрастает. Далее имеем

$$\|\mathfrak{P}_V(\lambda u_* + \xi) - \lambda u_*\| = \left\| \frac{\mathfrak{P}_V(u_* + \xi/\lambda) - u_*}{1/\lambda} \right\| \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \|(\mathfrak{P}_V)'_{u_*}(\xi)\|,$$

однако

$$(\mathfrak{P}_V)'_{u_*}(\xi) = \mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V\{u_*\}}(\xi).$$

Предельный переход и заключительное равенство обосновываются теоремой 4.2. ■

С л е д с т в и е. *Из теоремы 6.3 следует, что*

$$\|\mathfrak{P}_V(u_* + \xi) - u_*\| \le \|\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V\{u_*\}}(\xi)\|,$$

где $u_* \in V$, *а* $\xi \in H$.

§4. Нормальность и воспроизводимость

В этом параграфе применительно к гильбертову пространству будут изложены результаты работ [6,7] о нормальных конусах и воспроизводящих полугруппах.

Конус $K \subset H$ называется нормальным, если существует такое $\delta > 0$, что из включения $e_1,\ e_2 \in K$ и равенства $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ следует неравенство $\|e_1 + e_2\| \ge \delta$.

Введем обозначение

$$\cos(K) = \inf\left\{ \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|},\ u,\ v \in K \right\}.$$

Величина $\cos(K)$ характеризует раствор конуса K и будет часто использоваться в дальнейшем.

Конус K называется остроугольным, если $\cos(K) \ge 0$ и тупоугольным, если $\cos(K) < 0$.

Пусть векторы $e_1,\ e_2 \in K$ удовлетворяют равенству

$$\|e_1\| = \|e_2\| = 1.$$

Тогда

$$\|e_1 + e_2\| = \|e_1\| + 2(e_1, e_2) + \|e_2\| = 2(1 + (e_1, e_2)),$$

поэтому нормальность конуса K эквивалентна неравенству

$$\cos(K) > -1.$$

Это неравенство говорит о том, что в нормальном конусе K угол между принадлежащими ему векторами отделен от π числом, не зависящим от выбора этих векторов. Например, остроугольный конус является нормальным.

В конечномерном гильбертовом пространстве каждый замкнутый конус является нормальным. В бесконечномерном гильбертовом пространстве существуют замкнутые конусы без свойства нормальности. Укажем для примера такой конус в пространстве l_2.

Зададим

$$a_k = (-1)^k \sin(1/k),$$
$$b_k = (-1)^k \cos(1/k).$$

Пусть k нечетно. Положим

$$u_k = (0, \ldots, 0, a_k, b_k, 0, \ldots),$$
$$u_{k+1} = (0, \ldots, 0, 0, a_{k+1}, b_{k+1}, 0, \ldots).$$

Вектор u_k начинается с $k-1$ нулей. Обозначим через K замыкание в пространстве l_2 конической оболочки множества векторов

$$\{u_1, u_2, \ldots\}.$$

Из неравенств $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, ... следует, что для любого $u \in K$ существуют и единственны такие $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, ..., что

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots$$

Таким образом, множество K является замкнутым конусом. Однако при нечетном k имеет место равенство

$$\frac{(u_k, u_{k+1})}{\|u_k\|\|u_{k+1}\|} = -1 + \mathrm{o}(1/k)$$

Поэтому $\cos(K) = -1$. Это говорит о том, что конус K не является нормальным.

Т е о р е м а 1.4. *Пусть конус $K \subset H$ имеет воспроизводящую сопряженную полугруппу K^*. Тогда конус K нормальный.*

Доказательство. Пусть

$$Q = \bigcup_{\|v\| \le 1} \bigcup_{\|u\| \le 1} \{v, u\}.$$

Напомним, что $\{v, u\} = \{x \in H : v < x < u\}$, где неравенство $v < u$ означает $u - v \in K$ и $u \neq v$. Докажем, что множество Q ограничено.

Поскольку H – гильбертово пространство, для доказательства ограниченности множества Q достаточно доказать его слабую ограниченность [9].

Пусть $f \in H$. Представим f в виде

$$f = f_+ - f_-,$$

где $f_+,\ f_- \in K^*$. Докажем, что

$$|(f, x)| \le \|f_+\| + \|f_-\|$$

при всех $x \in Q$. Слабая ограниченность множества Q будет следовать из этого неравенства.

Пусть $x \in Q$ и $v < x < u$, где $\|v\| \le 1$ и $\|u\| \le 1$, тогда

$$-\|f_+\| \le (f_+, v) \le (f_+, x) \le (f_+, u) \le \|f_+\|,$$
$$-\|f_-\| \le (f_-, v) \le (f_-, x) \le (f_-, u) \le \|f_-\|.$$

Таким образом,

$$|(f_+, x)| \le \|f_+\|, |(f_-, x)| \le \|f_-\|.$$

Из этих неравенств следует, что

$$|(f, x)| \le |(f_+, x) - (f_-, x)| \le |(f_+, x)| + |(f_-, x)| \le \|f_+\| + \|f_-\|.$$

Итак, множество Q ограничено в пространстве H, поэтому существует такое $r > 0$ что $\|x\| \le r$ при всех $x \in Q$.

Пусть $e_1,\ e_2 \in K$ и $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$. Тогда $\|e_1 + e_2\| \neq 0$, поскольку K – конус. Очевидно, что

$$-\frac{e_1 + e_2}{\|e_1 + e_2\|} < \frac{e_1}{\|e_1 + e_2\|} < \frac{e_1 + e_2}{\|e_1 + e_2\|}$$

и, следовательно,

$$\frac{e_1}{\|e_1 + e_2\|} \in Q.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{\|e_1\|}{\|e_1+e_2\|} \le r,$$

т.е. $\|e_1+e_2\| \ge 1/r$. Нормальность конуса K доказана. ■

Т е о р е м а 2.4. *Пусть замкнутый конус $K \subset H$ нормален. Тогда сопряженная полугруппа K^* является воспроизводящей и имеет место равенство $H = K^* - (K^* \cap K)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что через $\check{\mathfrak{P}}_K$ был обозначен оператор $\check{\mathfrak{P}}_K(u) = \mathfrak{P}_K(-u)$. Пусть n-кратная операция оператора $\check{\mathfrak{P}}_K$ обозначена через $\check{\mathfrak{P}}_K^n$. В частности $\check{\mathfrak{P}}_K^0$ – тождественный оператор.

Определим отображения

$$\mathfrak{F}_+ : H \longrightarrow K^*,$$
$$\mathfrak{F}_- : H \longrightarrow K^*$$

по правилам

$$\mathfrak{F}_+(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \check{\mathfrak{P}}_K^n(u), \tag{1.4}$$

$$\mathfrak{F}_-(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \check{\mathfrak{P}}_K^n(u). \tag{2.4}$$

Докажем корректность этих определений.

Пусть конус K остроугольный. Тогда из включений

$$-\check{\mathfrak{P}}_K^n(u) \in -K \subset -K^*$$

следует равенство

$$\check{\mathfrak{P}}_K^2(u) = \mathfrak{P}_K(-\check{\mathfrak{P}}_K(u)) = 0.$$

Поэтому суммы (1.4) и (2.4) образованы из конечного числа слагаемых.

Пусть конус K тупоугольный. Тогда из нормальности конуса K следует неравенство $-1 < \cos(K) < 0$. Докажем, что

$$\|\check{\mathfrak{P}}_K(u)\| \le -\cos(K)\|v\|, \quad v \in K. \tag{3.4}$$

Действительно, если $\check{\mathfrak{P}}_K(v) = 0$, то неравенство (3.4) очевидно. Пусть $\check{\mathfrak{P}}_K(v) \ne 0$. Тогда неравенство (3.4) следует из того геометрически очевидного факта, что угол α между векторами v и $\check{\mathfrak{P}}_K(v)$ удовлетворяет неравенству

$$\pi/2 < \alpha < \arccos(\cos(K)) < \pi.$$

Из неравенства (3.4) следует, что

$$\|\check{\mathfrak{P}}_K^n(u)\| \le -\cos(K)\|\check{\mathfrak{P}}_K^{n-1}(u)\|, \quad n > 2,$$

поэтому

$$\|\mathfrak{P}_K^{v_n}(u)\| \le (-\cos(K))^{n-1}\|u\|, \quad n > 1. \tag{4.4}$$

Отсюда следует, что ряды (1.4) и (2.4) абсолютно сходятся и

$$\|\mathfrak{F}_+(u)\| \le \frac{2+\cos(K)}{1+\cos(K)}\|u\|,$$
$$\|\mathfrak{F}_-(u)\| \le \frac{1}{1+\cos(K)}\|u\|.$$

Докажем, что $\mathfrak{F}_+(K) \in K^*$ и $\mathfrak{F}_-(K) \in K^* \cap K$. Действительно,

$$\mathfrak{F}_+(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \check{\mathfrak{P}}_K^n(u) = \sum_{n=0}^{\infty}(\check{\mathfrak{P}}_K^{2n}(u) + \check{\mathfrak{P}}_K^{2n+1}(u)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}_{K^*}(\check{\mathfrak{P}}_K^{2n}(u)),$$

поэтому $\mathfrak{F}_+(K) \in K^*$. Аналогично

$$\mathfrak{F}_-(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \check{\mathfrak{P}}_K^n(u) = \sum_{n=0}^{\infty}(\check{\mathfrak{P}}_K^{2n+1}(u) + \check{\mathfrak{P}}_K^{2n+2}(u)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}_{K^*}(\check{\mathfrak{P}}_K^{2n+1}(u)),$$

поэтому $\mathfrak{F}_-(K) \in K^*$. Из очевидного включения $\mathfrak{F}_-(K) \in K$ следует, что $\mathfrak{F}_-(K) \in K^* \cap K$.

Из определения отображений $\mathfrak{F}_+$ и $\mathfrak{F}_-$ следует, что при всех $u \in H$ выполнено равенство $u = \mathfrak{F}_+(u) - \mathfrak{F}_-(u)$, поэтому имеет место представление $H = K^* - (K^* \cap K)$. ■

Из теорем 1.4 и 2.4 следует, что *в гильбертовом пространстве H конус K нормальный тогда и только тогда, когда он имеет воспроизводящую сопряженную полугруппу.*

§5. Образующие конуса

Пусть в пространстве H задан замкнутый конус K. Линейно независимую систему векторов $S \subset K$ будем называть системой образующих конуса K, если $\mathrm{Cl}\,\mathrm{co}\, S = K$. Функцию

$$\Gamma(u,v) = (u,v)_H, \quad u,\ v \in S,$$

будем называть функцией Грама системы S. Пусть $S \subset K$ – система образующих конуса K.

Т е о р е м а 1.5. *Включение $v \in K^*$ имеет место тогда и только тогда, когда $(u,v) \geq 0$ при всех $u \in S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Очевидно из определения.

Достаточность. Пусть $(u,v) \geq 0$ при всех $u \in S$, но $v \notin K^*$. Тогда существует такой вектор $w \in K$, что $(v,w) < 0$. Зададим

$$\varepsilon = -\frac{(v,u)}{2\|v\|}$$

и подберем для этого ε такие векторы $u_1, \ldots, u_k \in S$ и такие числа $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$, что $\|\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k - w\| \leq \varepsilon$. Так как

$$(v, \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k) = (v,w) + (v, \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k - w),$$

имеем

$$\lambda_1 (v,u_1) + \cdots + \lambda_k (v,u_k) \leq (v,u)/2 < 0.$$

Полученное противоречие доказывает включение $v \in K$. ■

Т е о р е м а 2.5. *Конус K остроугольный тогда и только тогда, когда функция Грама системы образующих S положительна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Очевидно из определения.

Достаточность. Пусть $v \in K$ и $u \in S$. Докажем, что $(u,v) \geq 0$. Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и подберем такие векторы $u_1, \ldots, u_k \in S$ и числа $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$, что $\|\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k - v\| \leq \varepsilon$. Тогда

$$\begin{gathered}(v,u) = (v - \lambda_1 u_1 - \ldots - \lambda_k u_k, u) + (\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k, u) \geq \\ -\varepsilon\|u\| + \lambda_1 \Gamma(u_1,u) + \cdots + \lambda_k \Gamma(u_k,u) \geq -\varepsilon\|u\|.\end{gathered}$$

Из произвольности ε следует, что $(v,u) \geq 0$. Из теоремы 1.5 получаем, что $v \in K^*$. Отсюда следует, что $K \subset K^*$, поэтому конус K остроугольный. ■

Т е о р е м а 3.5. *Пусть конус K остроугольный. Тогда*

$$\cos(K) = \inf\left\{ \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|},\ u,\ v \in S \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем предварительно следующее вспомогательное утверждение. Пусть $a,\ b,\ c$ – такие векторы, что

$$\|a\| = \|b\| = \|c\| = 1 \text{ и } (a,b) \geq 0,\ (a,c) \geq 0,\ (b,c) \geq 0,$$

тогда

$$\frac{(a+b,c)}{\|a+b\|} \geq \min\{(a,c),(b,c)\}.$$

Если $a = b$, то утверждение тривиально. Пусть $a \neq b$. В таком случае $(a,c) \geq (a,b)(b,c)$ или $(b,c) \geq (b,a)(a,c)$. Пусть для определенности выполнено первое неравенство. Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \left(a\cos\alpha + \frac{b-(a,b)a}{\|b-(a,b)a\|}\sin\alpha, c\right)$$

и изучим ее поведение на отрезке $[0, \arccos(a,b)]$. Легко видеть, что

$$f(\alpha) = \begin{cases} (a,c) & \text{при } \alpha = 0, \\ \frac{(a+b,c)}{\|a+b\|} & \text{при } \alpha = \frac{\arccos(a,c)}{2}, \\ (b,c) & \text{при } \alpha = \arccos(a,c). \end{cases}$$

Так как $\arccos(a,b) \leq \pi/2$, а на отрезке $[0,\pi/2]$ функция f вогнута, то имеет место неравенство (1.5).

Докажем теперь утверждение теоремы. Пусть $\varepsilon \geq 0$. Подберем такие ненулевые векторы $u \in K$ и $v \in K$, что

$$\frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} - \cos(K) \leq \varepsilon/2.$$

Далее подберем векторы

$$u_1, \ldots, u_k,\ v_1, \ldots, v_k \in S$$

и числа

$$\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \ldots, \mu_k \geq 0$$

так, что

$$\left| \frac{(u',v')}{\|u'\|\|v'\|} - \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} \right| \leq \varepsilon/2,$$

где

$$u' = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k,$$
$$v' = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k.$$

Из неравенства (1.5) следует, что

$$\frac{(u',v')}{\|u'\|\|v'\|} \geq \min_{1\leq i,\ j\leq k} \frac{(u_i,v_j)}{\|u_i\|\|v_j\|},$$

поэтому

$$\inf\left\{\frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|},\ u,\ v\in S\right\} - \cos(K) \leq \varepsilon.$$

Для окончательного доказательства теоремы остается заметить, что число ε взято произвольным. ■

§6. Проекция на конус

Докажем одно утверждение технического характера.

Т е о р е м а 1.6. *Пусть $V \subset H$ – замкнутое выпуклое подмножество. Пусть $u_0 \in H$ и $u^0 = \mathfrak{P}_V(u_0)$. Тогда если $u^1 \in V$ – такая точка, что $\|u^1 - u_0\| \leq \|u^0 - u_0\| + \delta$, то $\|u^1 - u^0\| \leq (2\delta\|u^0 - u_0\| + \delta^2)^{1/2}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $u^1 \in V$, из теоремы 3.2 следует неравенство $(u^1 - u^0, u^0 - u_0) \geq 0$. Поэтому

$$\|u^1 - u^0\|^2 = \|u^1 - u_0\|^2 - 2(u^1 - u^0, u^1 - u_0) - \|u^0 - u_0\|^2 \leq$$
$$\|u^0 - u_0\|^2 + 2\delta\|u^0 - u_0\|^2 + \delta^2 - \|u^0 - u_0\|^2 = 2\delta\|u^0 - u_0\| + \delta^2.$$

Требуемое неравенство доказано. ■

Т е о р е м а 2.6. *Пусть $S = \{u_1, u_2, \ldots\}$ и $V = \mathrm{Cl}\,\mathrm{conv}\,S$. Если $u_0 \in H$ и $u^0 = \mathfrak{P}_V(u_0)$, то*

$$u^0 = \lim_{n\to\infty} u^n,$$

где

$$u^n = \mathfrak{P}_{\mathrm{conv}\{u_1,\ldots,u_n\}}(u^0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$. Подберем $\delta > 0$ так, что

$$2\delta\|u^0 - u_0\| + \delta^2 \leq \varepsilon^2.$$

Выберем такое n_0 и такие $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_{n_0} \geq 0$, что

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n_0} = 1 \quad \text{и} \quad \|\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{n_0} u_{n_0} - u^0\| \leq \delta,$$

тогда

$$\|\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{n_0} u_{n_0} - u_0\| \leq$$

$$\|\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{n_0} u_{n_0} - u^0\| + \|u^0 - u_0\| \le \|u^0 - u_0\| + \delta.$$

Поэтому при всех $n \ge n_0$ имеет место неравенство

$$\|u^n - u_0\| \le \|u^0 - u_0\| = \delta.$$

Из теоремы 1.6 следует, что $\|u^n - u^0\| \le \varepsilon$ при всех $n \ge n_0$. ■

Пусть замкнутый конус $K \subset H$ имеет счетную систему образующих

$$S = \{u_1, u_2, \ldots\}.$$

Т е о р е м а 3.6. *Пусть* $u_0 \in H$ *и* $u^0 = \mathfrak{P}_K(u_0)$. *Тогда*

$$u^0 = \lim_{n \to \infty} u^n,$$

где

$$u^n = \mathfrak{P}_{\mathrm{co}\{u_1, \ldots, u_n\}}(u^0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$. Подберем $\delta > 0$ так, что

$$2\delta\|u^0 - u_0\| + \delta^2 \le \varepsilon^2.$$

Далее подберем такое n_0 и такие $\lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_{n_0} \ge 0$, что

$$\|\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{n_0} u_{n_0} - u^0\| \le \delta.$$

Из последнего неравенства аналогично доказательству теоремы 2.6 имеем $\|u^n - u^0\| \le \varepsilon$ при всех $n \ge n_0$. ■

Итак, если конус K имеет счетную систему образующих, то для приближенного решения задачи минимизации

$$\|u - u_0\| \xrightarrow[u \in K]{} \min$$

достаточно решить задачу минимизации

$$\|u - u_0\| \xrightarrow[u \in \mathrm{co}\{u_1, \ldots, u_n\}]{} \min$$

для достаточно большого n. Последняя задача минимизации уже конечномерна и может быть точно решена за конечное число шагов.

Пусть конус K имеет систему образующих $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$. В таком случае каждый вектор $u \in K$ однозначно представляется в виде

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n,$$

где $\lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_n \ge 0$. Зададим

$$\Lambda_i(u) = \lambda_i,$$

где $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$u = \Lambda_1(u)u_1 + \cdots + \Lambda_n(u)u_n.$$

Следующая теорема аналогична теореме 1.3.

Т е о р е м а 4.6. *Вектор $u^0 \in K$ является решением задачи минимизации*

$$\|u - u_0\| \xrightarrow[u \in K]{} \min$$

тогда и только тогда, когда

$$(u^0 - u_0, u_i) \geq 0$$

при $i = 1, \ldots, n$ и

$$(u^0 - u_0, u_i) = 0$$

при $i = 1, \ldots, n$ таких, что $\Lambda_i(u^0) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть вектор $u^0 \in K$ является решением указанной задачи минимизации. Тогда из теоремы 1.3 следует, что

$$(u^0 - u_0, u_i) \geq 0$$

при $i = 1, \ldots, n$ и $(u^0 - u_0, u^0) = 0$. Однако

$$u^0 = \Lambda_1(u^0)u_1 + \cdots + \Lambda_n(u^0)u_n,$$

поэтому

$$\Lambda_1(u^0)(u^0 - u_0, u_1) + \cdots + \Lambda_n(u^0)(u^0 - u_0, u_n) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(u^0 - u_0, u_i) = 0$$

при $i = 1, \ldots, n$ таких, что $\Lambda_i(u^0) > 0$.

Достаточность. Пусть вектор $u^0 \in K$ удовлетворяет указанным условиям. Из равенства

$$u^0 = \Lambda_1(u^0)u_1 + \cdots + \Lambda_n(u^0)u_n$$

следует равенство $(u^0 - u_0, u^0) = 0$. Из неравенства $(u^0 - u_0, u_i) \geq 0$, где $i = 1, \ldots, n$, следует включение $u^0 - u_0 \in K^*$. Поэтому из теоремы 1.3 следует, что вектор u^0 является решением указанной задачи минимизации. ■

Опишем теперь алгоритм решения задачи минимизации

$$\|u - u_0\| \xrightarrow[u \in K]{} \min.$$

Пусть $I \subset \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через $\mathrm{Lin}(I)$ линейную оболочку системы векторов $\{u_i : i \in I\}$. Предполагается, что $\mathrm{Lin}(\varnothing) = 0$.

Результатом работы описываемого алгоритма является такое подмножество $I \subset \{1, \ldots, n\}$, что

$$\mathfrak{P}_K(u_0) = \mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I)}(u_0).$$

Основной процедурой в этом алгоритме служит процедура проекции на линейное подпространство $\mathrm{Lin}(I)$.

Алгоритм состоит из трех этапов A, B, C. В начале работы алгоритма предполагается, что $I = \varnothing$.

Этап A. Пусть построено такое подмножество $I \subset \{1, \ldots, n\}$, что выполнено включение

$$\mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I)}(u_0) \in K,$$

причем

$$\Lambda_i(\mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I)}(u_0)) > 0$$

при всех $i \in I$. Пусть

$$\mu = \min_{1 \le i \le n} (\mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I)}(u_0) - u_0, u_i).$$

Если $\mu \ge 0$, то из теоремы 4.6 следует, что

$$\mathfrak{P}_K(u_0) = \mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I)}(u_0),$$

поэтому алгоритм работу заканчивает. Пусть $\mu < 0$. Возьмем тот номер j, при котором реализуется указанный выше минимум. Имея вектор u_j, переходим к этапу B.

Этап B. Определим такое максимальное t, $0 \le t \le 1$, что вектор

$$v = (1-t)\mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I)}(u_0) + t\mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I \cup j)}(u_0)$$

принадлежит конусу K. Легко видеть, что

$$(\mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I \cup j)}(u_0) - u_0, u_j) = 0,$$

поэтому

$$(\mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I \cup j)}(u_0) - \mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I)}(u_0), u_j) = (\mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I)}(u_0) - u_0, u_j) = -\mu.$$

Отсюда следует, что $t > 0$. Поэтому

$$\|v - u_0\| < \|\mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I)}(u_0) - u_0\|.$$

Сформируем множество $I = \{i : \Lambda_i(v) > 0\}$. Имея множество I и вектор v, переходим к этапу C.

Этап C. Определим такое максимальное t, $0 \le t \le 1$, что вектор

$$w = (1-t)v + t\mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I)}(u_0)$$

принадлежит конусу K. Очевидно, что

$$\|w - u_0\| \le \|v - u_0\|,$$

причем равенство возможно только при выполнении равенства

$$v = \mathfrak{P}_{\mathrm{Lin}(I)}(u_0).$$

Сформируем множество $I = \{i : \Lambda_i(w) > 0\}$. Если $t = 1$, то, имея множество I, переходим к этапу A. Если $t < 1$, то, имея множество I и вектор $v = w$, повторяем этап C. Отметим, что число таких повторений не превосходит числа элементов в множестве I, с которого этап C начал работу.

§ 7. Задача фильтрации

Пусть в гильбертовом пространстве H задано непустое выпуклое замкнутое подмножество V. Будем в этом параграфе векторы $u \in V$ называть полезными сигналами.

Пусть $(\Omega, \mathbb{P}, \mathfrak{A})$ – вероятностное пространство с вероятностью $\mathbb{P}$ и σ-алгеброй $\mathfrak{A}$. Отображение

$$\xi : \Omega \longrightarrow H$$

называется случайной величиной в пространстве H, если для любого открытого подмножества $U \subset H$ прообраз $\xi^{-1}(U)$ измерим относительно введенной в вероятностном пространстве σ-алгебры $\mathfrak{A}$. Легко видеть, что отображение ξ тогда и только тогда является случайной величиной в пространстве H, когда для любой точки $u_0 \in H$ функция

$$f(\omega) = \|\xi(\omega) - u_0\|,$$

где $\omega \in \Omega$ является вещественной случайной величиной.

Пусть случайная величина ξ удовлетворяет неравенству

$$\mathbb{M}\|\xi\| < \infty,$$

где $\mathbb{M}$ – математическое ожидание.

В дальнейшем случайную величину ξ будем рассматривать как аддитивную помеху, наложенную на полезный сигнал $u_* \in V$. Случайную величину $u_0 = u_* + \xi$ будем называть возмущенным сигналом. В задаче фильтрации требуется, зная возмущенный сигнал u_0, сделать оценку u^0 для полезного сигнала u_*.

Для решения задачи фильтрации вводится отображение

$$\mathfrak{F} : H \longrightarrow V$$

и в качестве оценки сигнала u_* берется случайная величина

$$u^0 = \mathfrak{F}(u_* + \xi).$$

Данное отображение $\mathfrak{F}$ будет называться фильтром.

Естественно, чтобы фильтр $\mathfrak{F}$ удовлетворял следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}(u) = u && \text{при всех } u \in V, \\ &\|\mathfrak{F}(u) - \mathfrak{F}(v)\| \le \|u - v\| && \text{при всех } u, v \in H. \end{aligned}$$

При выполнении этих условий имеет место неравенство

$$\|\mathfrak{F}(u_* + \xi) - u_*\| = \|\mathfrak{F}(u_* + \xi) - \mathfrak{F}(u_*)\| \le \|\xi\|.$$

Противоположное неравенство говорило бы о том, что фильтр дает оценку $u^0 = \mathfrak{F}(u_* + \xi)$ для полезного сигнала u_*, расположенную в пространстве H дальше, чем исходный возмущенный сигнал $u_0 = u_* + \xi$.

При сделанных предположениях отображение $\mathfrak{F}$ непрерывно и поэтому имеет место неравенство

$$\mathbb{M}\|\mathfrak{F}(u_* + \xi) - u_*\| \le \mathbb{M}\|\xi\|.$$

Изучим поведение величины

$$\rho(\lambda) = \mathbb{M}\|\mathfrak{F}(u_* + \lambda\xi) - u_*\|.$$

При этом будем предполагать, что отображение $\mathfrak{F}$ дифференцируемо по направлениям в любой точке $u_* \in V$.

Т е о р е м а 1.7. *Имеет место представление*

$$\rho(\lambda) = \mathbb{M}\|\mathfrak{F}'_{u_*}(\xi)\|\lambda + o(\lambda).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\omega \in \Omega$. Зададим случайную величину

$$\eta_\lambda(\omega) = \left\| \frac{\mathfrak{F}(u_* + \lambda\xi(\omega)) - u_*}{\lambda} \right\| - \left\| \mathfrak{F}'_{u_*}(\xi(\omega)) \right\|.$$

Тогда $|\eta_\lambda(\omega)| \le \|\xi(\omega)\|$ и $\lim\limits_{\lambda \to 0} \eta_\lambda(\omega) = 0$.

Из теоремы Лебега об ограниченной сходимости [22] следует, что

$$\mathbb{M}\eta_\lambda = \int\limits_\Omega \eta_\lambda(\omega)d\mathbb{P}(\omega) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0.$$

Равенство $\mathbb{M}\|\mathfrak{F}(u_* + \lambda\xi) - u_*\| = \mathbb{M}\|\mathfrak{F}'_{u_*}(\xi)\|\lambda + \lambda\mathbb{M}\eta_\lambda$ завершает доказательство теоремы. ■

С л е д с т в и е. *Имеет место представление*

$$\mathbb{M}\|\mathfrak{P}_V(u_* + \lambda\xi) - u_*\| = \mathbb{M}\|\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\,V\{u_*\}}(\xi)\|\lambda + \mathrm{o}(\lambda).$$

Пусть V – замкнутая линейная полугруппа. Будем фильтр считать положительно однородным

$$\mathfrak{F}(\lambda u) = \lambda\mathfrak{F}(u),$$

где $\lambda \geq 0$ и $u \in H$.

Т е о р е м а 2.7. *Пусть полезный сигнал $u_* \in V$ удовлетворяет соотношению* $\mathrm{Cl}\,V\{u_*\} = H$. *Тогда*

$$\sup_{u\in V}\mathbb{M}\|\mathfrak{F}(u + \xi) - u\| = \mathbb{M}\|\xi\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство

$$\sup_{u\in V}\mathbb{M}\|\mathfrak{F}(u + \xi) - u\| \leq \mathbb{M}\|\xi\|$$

очевидно. Используя обозначения теоремы 1.7, имеем

$$\mathbb{M}\|\mathfrak{F}(\lambda u_* + \xi) - \lambda u_*\| = \mathbb{M}\left\|\frac{\mathfrak{F}(u_* + \xi/\lambda) - u_*}{1/\lambda}\right\| =$$
$$\mathbb{M}\|\mathfrak{F}'_{u_*}(\xi)\| + \mathbb{M}\eta_{1/\lambda} = \mathbb{M}\|\xi\| + \mathbb{M}\eta_{1/\lambda} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \mathbb{M}\|\xi\|. \quad ■$$

З а м е ч а н и е. Имеет место равенство

$$\sup_{u\in V}\mathbb{M}\|\mathfrak{P}_V(u + \xi) - u\| = \sup_{u\in V}\mathbb{M}\|\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\,V\{u\}}(\xi)\|.$$

Основанием для этого равенства служит теорема 6.3.