Глава II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

В этой главе собраны необходимые сведения о пространствах Соболева, дифференциальных операторах и краевых задачах. Специалистам эти сведения должны быть известны по работам [17, 23–27], которыми при изложении этого раздела мы постоянно пользуемся.

Этот раздел, как и предыдущий, носит вспомогательный характер. Однако в отличие от него, уже требует гораздо больше предварительной информации. Например, предполагается, что читатель достаточно хорошо знаком с теорией распределений. Поэтому мы только напоминаем обозначения пространств пробных функций и распределений, но не даем их определения и не доказываем их свойства. Отметим, что сказанное относится только к §8. В последующих параграфах этого раздела все сформулированные утверждения уже доказываются. Некоторые доказательства оригинальны, однако в большинстве случаев мы используем или перерабатываем доказательства, изложенные в цитированных выше работах.

§8. Распределения и преобразование Фурье

Пусть $n \geq 1$ – целое число. В теории распределений вектор

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

образованный из целых положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, называется мультииндексом. При этом используются следующие традиционные названия и обозначения:

1) $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ – порядок мультииндекса α,
2) $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$ – мультистепень,
3) $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ – мультифакториал,
4) $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}, \ldots, \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$ – оператор дифференцирования.

Заметим, что неравенство $\alpha \leq \beta$ означает выполнение неравенств $\alpha_i \leq \beta_i$ при всех $1 \leq i \leq n$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество. Напомним обозначения некоторых пространств пробных функций и соответствующих им пространств распределений.

Поскольку нам придется работать с преобразованием Фурье, в этом разделе линейные пространства предполагаются комплексными.

Итак,

$C_0^\infty(\Omega)$ и $\mathcal{D}'(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем и пространство распределений,

$C_0^m(\Omega)$ и $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ – пространство функций с непрерывными производными порядка $\leq m$ и компактным носителем и пространство распределений порядка $\leq m$,

$C^\infty(\Omega)$ и $\mathcal{E}'(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций и пространство распределений с компактным носителем,

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $S'(\mathbb{R}^n)$ – пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций и пространство медленно растущих распределений.

Имеет место важное включение

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{D}'^m(\mathbb{R}^n),$$

говорящее о том, что каждое распределение с компактным носителем имеет конечный порядок.

Через $C^m(\mathrm{Cl}\,\Omega)$ обозначается пространство таких сужений

$$v = u|_{\mathrm{Cl}\,\Omega},$$

где $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$, для которых величина

$$\|v\|_{C^m(\mathrm{Cl}\,\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathrm{Cl}\,\Omega} |\partial^\alpha u(x)|$$

конечна. Из соображений непрерывности следует, что определение величины $\|v\|_{C^m(\mathrm{Cl}\,\Omega)}$ корректно: значение $\|v\|_{C^m(\mathrm{Cl}\,\Omega)}$ не зависит от выбора функции $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$ такой, что $v = u|_{\mathrm{Cl}\,\Omega}$. В пространстве $C^m(\mathrm{Cl}\,\Omega)$ величина $\|\cdot\|_{C^m(\mathrm{Cl}\,\Omega)}$ служит нормой, относительно которой это пространство является банаховым. Заметим, что $\mathbb{R}^n = \mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n$, однако мы будем считать, что $C^m(\mathbb{R}^n)$ и $C^m(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)$ – разные пространства. В данном случае операция замыкания Cl несет большую смысловую нагрузку.

Пусть φ – пробная функция, а Λ – распределение. Значение распределения Λ на пробной функции φ будет обозначаться через (Λ, φ).

Через δ_x будет обозначаться дельта-функция, которая определяется по правилу $(\delta_x, \varphi) = \varphi(x)$.

Пусть $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Через $\Lambda|_\Omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$ будем обозначать такое распределение, что $(\Lambda|_\Omega, \varphi) = (\Lambda, \varphi)$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Через

$$\rho_\Omega : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

будем обозначать оператор сужения на множество Ω, сопоставляющий распределению $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ распределение $\Lambda|_\Omega \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Через λ_Ω будем обозначать оператор продолжения нулем вне множества Ω. А именно, пусть на множестве Ω задана функция u. Тогда

$$(\lambda_\Omega u)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при } x \in \Omega, \\ 0 & \text{при } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Будем положительную пробную функцию $h \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$ называть шапочкой, если $\operatorname{supp} h \subset \mathbb{D}^n$ и $\int h(x)dx = 1$.

Функцию

$$h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} h(\varepsilon^{-1})$$

будем называть ε-шапочкой. Операция свертки с ε-шапочкой является хорошей сглаживающей процедурой.

Т е о р е м а 1.8. *Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

$$u = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon * u$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Докажем неравенство

$$\|h_\varepsilon * u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Действительно, поскольку

$$h_\varepsilon * u(x) = \int h_\varepsilon(y) u(x-y) dy,$$

имеем

$$\|h_\varepsilon * u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \int \left| \int h_\varepsilon(y) u(x-y) dy \right|^2 dx \le$$

$$\iint |h_\varepsilon(y) u(x-y)|^2 dy \int h_\varepsilon(y) dy dx \le$$

$$\int h_\varepsilon(y) \int |u(x-y)|^2 dx dy = \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

2) Пусть $v \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Докажем, что

$$v = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon * v$$

в пространстве $C^0(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)$. Действительно,

$$\left| v(x) - h_\varepsilon * v(x) \right| = |v(x) - \int h_\varepsilon(y) v(x-y) dy \Big| =$$
$$\left| \int h_\varepsilon(y) \left(v(x) - v(x-y)\right) dy \right| \le \sup_{y \in \varepsilon \mathbb{D}^n} |v(x) - v(x-y)|.$$

Поэтому из равномерной непрерывности функции v следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|v - h_\varepsilon * v\|_{C^0(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)} = 0.$$

3) Пусть $\delta > 0$. Тогда существует такая функция $v \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, что

$$\|u - v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le \delta/3.$$

Подберем $\varepsilon_0 > 0$ так, что

$$\|u - h_\varepsilon * v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le \delta/3$$

при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Возможность этого выбора гарантируется п. 2) и включением $v \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$. Но тогда из п. 1) следует, что

$$\|u - h_\varepsilon * v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le \|u - v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \|v - h_\varepsilon * v\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} +$$
$$\|h_\varepsilon * v - h_\varepsilon * u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le \delta$$

при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. ■

С л е д с т в и е. *Из теоремы 1.8 следует, что функция $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ может быть сколь угодно точно в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ аппроксимирована пробными функциями вида*

$$\varphi = h_\varepsilon * (\chi_{r\mathbb{D}^n} u),$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а $r > 0$ достаточно велико. В частности, поэтому подпространство $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Зададим $(x, \xi) = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$. Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Функция

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,\xi)} \varphi(x) dx$$

называется преобразованием Фурье функции φ. Функция

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(\xi) = (2\pi)^{-n/2i} \int e^{i(x,\xi)} \varphi(x) dx$$

называется обратным преобразованием Фурье.

Легко проверяется, что

$$\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$
$$\mathcal{F}^{-1}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Более сложно доказывается, что линейные операторы

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$
$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

непрерывны и

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = I,$$

где I – тождественный оператор.

Приведем основные формулы, связанные с преобразованием Фурье:

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi) = (-i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}\varphi,$$
$$\mathcal{F}(x^\alpha \varphi) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha \mathcal{F}\varphi,$$
$$(\varphi, \psi)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi)_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$
$$\mathcal{F}(\varphi * \psi) = (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}\varphi\mathcal{F}\psi,$$
$$\mathcal{F}(\varphi\psi) = (2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}\varphi * \mathcal{F}\psi,$$
$$\mathcal{F}^2\varphi = \check{\varphi},$$

где $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Третье равенство в этом списке называется равенством Парсеваля.

Пусть $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Распределение $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, определяемое по правилу

$$(\mathcal{F}u, \varphi) = (u, \mathcal{F}\varphi),$$

где $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, называется преобразованием Фурье распределения u. Аналогичным образом по правилу

$$(\mathcal{F}^{-1}u, \varphi) = (u, \mathcal{F}^{-1}\varphi)$$

определяется обратное преобразование Фурье.

Преобразование Фурье распределений сохраняет многие свойства преобразования Фурье пробных функций. Так линейные операторы

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

непрерывны и

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = I.$$

Аналогичным образом имеют место равенства

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi) = (-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}\varphi,$$
$$\mathcal{F}(x^\alpha \varphi) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \mathcal{F}\varphi,$$
$$\mathcal{F}^2 u = \check{u},$$

где $(\check{u}, \varphi) = (u, \check{\varphi})$. Легко проверяется, что

$$\mathcal{F}\delta_0 = (2\pi)^{-n/2}.$$

В частности, поэтому

$$\mathcal{F}1 = (2\pi)^{n/2} \delta_0.$$

Т е о р е м а 2.8. *Преобразование Фурье*

$$\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$$

является изометрическим изоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u, v \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Докажем, что имеют место включения $\mathcal{F}u, \mathcal{F}v \in L_2(\mathbb{R}^n)$ и выполнено равенство Парсеваля

$$(u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (\mathcal{F}u, \mathcal{F}v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots,$ – такие пробные функции, что

$$u = \lim_{k \to \infty} \varphi_k,$$
$$v = \lim_{k \to \infty} \psi_k$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Из равенства Парсеваля в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ следует, что

$$\|\mathcal{F}\varphi_k - \mathcal{F}\varphi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi_k - \varphi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

при всех $k, m \geq 1$. Поэтому последовательность $\mathcal{F}\varphi_1, \mathcal{F}\varphi_2, \ldots$ фундаментальна в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Отсюда следует существование такой функции $w \in L_2(\mathbb{R}^n)$, что

$$w = \lim_{k \to \infty} \mathcal{F}\varphi_k$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Однако

$$\mathcal{F}u = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}\varphi_k$$

в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $\mathcal{F}u = w$ и

$$\mathcal{F}u = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}\varphi_k$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Аналогично

$$\mathcal{F}v = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}\psi_k$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Запишем равенство Парсеваля

$$(\varphi_k, \psi_k)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (\mathcal{F}\varphi_k, \mathcal{F}\psi_k)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

в пространстве $S(\mathbb{R}^n)$. Переходя к пределу по k, получаем равенство Парсеваля

$$(u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (\mathcal{F}u, \mathcal{F}v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. ■

Пусть $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда преобразование Фурье

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = (2\pi)^{-n/2}(u, e^{-i(\cdot,\xi)})$$

является целой аналитической от $\xi \in \mathbb{C}^n$ функцией. Пусть m – порядок распределения u и пусть носитель $\operatorname{supp} u$ распределения u содержится в шаре $r\mathbb{D}^n$. Тогда из теоремы Пэли-Винера [23] следует существование такого γ, что

$$|\mathcal{F}u(\xi)| \le \gamma(1 + \|\xi\|)^{mer|\operatorname{Im}\xi\|}$$

при всех $\xi \in \mathbb{C}^n$. Из этого неравенства следует, что при $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $\mathcal{F}u(\xi)$ на бесконечности растет не слишком быстро.

Преобразование Фурье свертки и преобразование Фурье произведения имеют смысл только при должном выборе распределений:
а) если $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, то $\mathcal{F}(u * v) = (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}u\mathcal{F}v$;
б) если $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то $\mathcal{F}(uv) = (2\pi)^{-n/2}\mathcal{F}u * \mathcal{F}v$.

В дальнейшем важную роль будут играть преобразования Фурье борелевских мер.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана борелевская мера μ с компактным носителем. Тогда мера μ по правилу

$$(\Lambda, \varphi) = \int \varphi d\mu,$$

где $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, определяет распределение $\Lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Т е о р е м а 3.8. *Имеет место равенство*

$$(\mathcal{F}\Lambda)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,\xi)} d\mu(x). \tag{1.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, $\Lambda \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, поэтому

$$(\mathcal{F}\Lambda)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} (\Lambda, e^{-i(\cdot,\xi)}) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,\xi)} d\mu(x).$$

Важная для дальнейшего формула (1.8) легко доказывается и непосредственно:

$$(\mathcal{F}\Lambda, \varphi) = (\Lambda, \mathcal{F}\varphi) = \int \mathcal{F}\varphi(x) d\mu(x) =$$
$$\int (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,\xi)} \varphi(\xi) d\xi d\mu(x) =$$
$$\int (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,\xi)} d\mu(x) \varphi(\xi) d\xi =$$
$$\left(\int (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,\cdot)} d\mu(x), \varphi \right). \quad \blacksquare$$

Пусть $u \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда преобразование Фурье $\mathcal{F}u$ является непрерывной ограниченной функцией

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,\xi)} u(x) dx.$$

Если при этом имеет место включение $\mathcal{F}u \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i(x,\xi)} F u(\xi) d\xi,$$

в частности, поэтому исходная функция u должна быть непрерывна.

Т е о р е м а 4.8. *Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда функция*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n),$$

определенная по правилу $f(y) = u(\cdot - y)$, непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что для доказательства теоремы достаточно показать, что функция f непрерывна в нуле. Итак,

$$\|f(y) - f(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}f(y) - \mathcal{F}f(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} =$$
$$\|e^{i(y,\cdot)} \mathcal{F}u - \mathcal{F}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\max_{\xi\in r\mathbb{D}^n}|e^{i(y,\xi)}-1|\|\mathcal{F}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}+2\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus r\mathbb{D}^n}|\mathcal{F}u(\xi)|^2d\xi.$$

Пусть $\|y\|\le\varepsilon^2$ и $r=\varepsilon^{-1}$, тогда из легко проверяемого неравенства $|e^v-1|\le\rho e^\rho$, где $\rho=|v|$ следует, что

$$\|f(y)-f(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}\le\varepsilon e^\varepsilon\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}+2\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\varepsilon^{-1}\mathbb{D}^n}|\mathcal{F}u(\xi)|^2d\xi,$$

поэтому

$$\lim_{y\to 0}\|f(y)-f(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}=0.\quad\blacksquare$$

§9. Пространства бесселевых потенциалов

Пусть $s\in\mathbb{R}$. Через $H^s_2(\mathbb{R}^n)$ обозначается пространство таких распределений $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, что $\mathcal{F}u\in L_2(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$ и величина

$$\|u\|^2_{H_2(\mathbb{R}^n)^s}=\int|\mathcal{F}u(\xi)|^2(1+\|\xi\|^2)^s d\xi$$

конечна. Распределения $u\in H^s_2(\mathbb{R}^n)$ называются бесселевыми потенциалами.

Пространство $H^s_2(\mathbb{R}^n)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u,v)_{H^s_2(\mathbb{R}^n)}=\int\mathcal{F}u(\xi)\overline{\mathcal{F}v(\xi)}(1+\|\xi\|^2)^s d\xi.$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ устанавливает изометрический изоморфизм

$$\mathcal{F}:H^s_2(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n,(1+\|\xi\|^2)^s d\xi).$$

Отметим, что

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\subset\bigcup_{s\in\mathbb{R}}H^s_2(\mathbb{R}^n).$$

Действительно, пусть $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда из теоремы Пэли–Винера следует существование такого γ, что

$$|\mathcal{F}u(\xi)|\le\gamma(1+\|\xi\|)^m,$$

где m – порядок распределения u, поэтому $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$, где

$$s < -m - n/2.$$

Т е о р е м а 1.9. *Пространство $H_2^{-s}(\mathbb{R}^n)$ является сопряженным пространством к пространству $H_2^s(\mathbb{R}^n)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$, а $v \in H_2^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int |\mathcal{F}u(\xi)\overline{\mathcal{F}v(\xi)}|d\xi = \int |\mathcal{F}u(\xi)|(1+\|\xi\|^2)^{s/2}|\mathcal{F}v(\xi)|(1+\|\xi\|^2)^{-s/2}d\xi \leq$$
$$\|u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{H_2^{-s}(\mathbb{R}^n)}.$$

Поэтому $\mathcal{F}u(\xi)\overline{\mathcal{F}v(\xi)} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и билинейная форма

$$\langle u, v\rangle = \int \mathcal{F}u(\xi)\overline{\mathcal{F}v(\xi)}d\xi$$

удовлетворяет неравенству

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{H_2^{-s}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.9}$$

При фиксированном $v \in H_2^{-s}(\mathbb{R}^n)$ из неравенства (1.9) следует, что линейный функционал

$$(\Lambda, u) = \langle u, v\rangle$$

непрерывен в пространстве $v \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$.

Предположим, что линейный функционал Λ непрерывен в пространстве $H_2^s(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует такой элемент $u_\Lambda \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$, что

$$(\Lambda, u) = (u, u_\Lambda)_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}$$

при всех $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$. Зададим

$$v_\Lambda = \mathcal{F}^{-1}((1+\|\xi\|^2)^s\mathcal{F}u),$$

тогда

$$(u, u_\Lambda)_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} = \langle u, v_\Lambda\rangle$$

при всех $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$. Проведенное рассуждение показывает, что изометрический изоморфизм

$$u \mapsto \mathcal{F}^{-1}((1+\|\xi\|^2)^s\mathcal{F}u)$$

позволяет отождествить сопряженное пространство к пространству $H_2^s(\mathbb{R}^n)$ и пространство $H_2^{-s}(\mathbb{R}^n)$. ■

Пусть $s < q$. Тогда из включения $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$ следует включение $u \in H_2^q(\mathbb{R}^n)$. При этом $\|u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{H_2^q(\mathbb{R}^n)}$. Поэтому имеет место вложение $H_2^s(\mathbb{R}^n) \subset H_2^q(\mathbb{R}^n)$.

Т е о р е м а 2.9. *Пусть $s > 0$ и целое положительное $m < s - n/2$. Тогда имеет место вложение $H_2^s(\mathbb{R}^n) \subset C^m(\mathbb{R}^n)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $m = 0$. Обозначим

$$I(s) = \left(\int (1 + \|\xi\|^2)^{-s} d\xi \right)^{1/2}.$$

Докажем, что

$$\|u\|_{C^0(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n/2} I(s) \|u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Действительно, если $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int |\mathcal{F}u(\xi)| d\xi = \int (1 + \|\xi\|^2)^{-s/2} |\mathcal{F}u(\xi)| (1 + \|\xi\|^2)^{s/2} d\xi \leq I(s) \|u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)},$$

поэтому $\mathcal{F}u \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Отсюда следует, что $u \in C^0(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)$ и

$$|u(x)| = |(2\pi) - n/2 \int e^{i(x,\xi)} \mathcal{F}u(\xi) d\xi| \leq$$

$$(2\pi)^{-n/2} \int |\mathcal{F}u(\xi)| d\xi \leq (2\pi)^{-n/2} I(u) \|u\|_{H_2^s(\mathbb{R})}.$$

2) Пусть $m < s - n/2$ и $|\alpha| \leq n$. Если $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int |\mathcal{F}\partial^\alpha u(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{s-|\alpha|} d\xi =$$

$$\int |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \xi^{2\alpha} (1 + \|\xi\|^2)^{s-|\alpha|} d\xi \leq |\mathcal{F}u(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|^2)^s d\xi.$$

Отсюда следует, что $\partial^\alpha u \in H_2^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|\partial^\alpha u\|_{H_2^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Из п. 1) следует, что $\partial^\alpha u \in C^0(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)$ и

$$\|\partial^\alpha u\|_{C^0(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-n/2} I(s - |\alpha|) \|u\|_{H_2^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)},$$

поэтому $u \in C^m(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)$ и

$$\|u\|_{C^m(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)} \le (2\pi)^{-n/2} \left(\sum_{|\alpha| \le m} I(s - |\alpha|) \right) \|u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Вложение $H_2^s(\mathbb{R}^n) \subseteq C^m(\mathbb{R}^n)$ доказано. ■

Т е о р е м а 3.9. *Подпространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в пространстве $H_2^s(\mathbb{R}^n)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$, тогда

$$(1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \mathcal{F}u \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому в пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ существует такая последовательность пробных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, что

$$\lim_{k \to l} \varphi_k = (1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \mathcal{F}u$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Отсюда следует, что

$$\lim_{k \to \infty} (1 + \|\xi\|^2)^{-s/2} \varphi_k = \mathcal{F}u$$

в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n, (1 + \|\xi\|^2)^s d\xi)$. Зададим

$$\psi_k = \mathcal{F}^{-1}((1 + \|\xi\|^2)^{-s/2} \varphi_k).$$

Тогда $\psi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k = u$$

в пространстве $H_2^s(\mathbb{R}^n)$. ■

Пусть $k \ge 0$ – целое число. Обозначим

$$\gamma^k : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$$

оператор, определяемый по правилу

$$\gamma^k(\varphi)(x') = \left. \frac{\partial^k \varphi(x', x_n)}{\partial x_n^k} \right|_{x_n = 0},$$

где $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Т е о р е м а 4.9. *Пусть $s > 0$ и целое положительное $m < s - 1/2$. Тогда при всех $k = 0, 1, \ldots, m$ линейный оператор*

$$\gamma^k : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$$

единственным образом продолжается до линейного непрерывного оператора

$$\gamma^k : H_2^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

При этом для линейного непрерывного оператора

$$\gamma^0 \times \gamma^1 \times \cdots \times \gamma^m : H_2^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \prod_{k=0}^{m} H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

существует такой линейный непрерывный оператор

$$\varkappa : \prod_{k=0}^{m} H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow H_2^s(\mathbb{R}^n),$$

что сквозное отображение

$$\prod_{k=0}^{m} H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \xrightarrow{\varkappa} H_2^s(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\gamma^0 \times \gamma^1 \times \cdots \times \gamma^m} \prod_{k=0}^{m} H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

совпадает с тождественным.

Доказательство. 1) Пусть $\psi = \gamma^0(\varphi)$, где $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Фиксируем точку $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Из равенства

$$\mathcal{F}\varphi(\xi', \xi_n) =$$
$$(2\pi)^{-1/2} \int e^{-ix_n\xi_n} \left((2\pi)^{-(n-1)/2} \int e^{-i(x',\xi')} \varphi(x', x_n) dx' \right) dx_n$$

следует, что

$$(2\pi)^{-(n-1)/2} \int e^{-i(x',\xi')} \varphi(x', x_n) dx' = (2\pi)^{-1/2} \int e^{ix_n\xi_n} \mathcal{F}\varphi(\xi', \xi_n) d\xi_n.$$

Поэтому

$$\mathcal{F}\psi(\xi') = (2\pi)^{-1/2} \int \mathcal{F}\varphi(\xi', \xi_n) d\xi_n.$$

Заметим, что

$$\int (1 + \|\xi\|^2)^{-s} d\xi_n = A(1 + \|\xi'\|^2)^{-s+1/2},$$

где

$$A = \int (1 + t^2)^{-s} dt.$$

Поэтому

$$|\mathcal{F}\psi(\xi')|^2 \le ((2\pi)^{-1/2}\int (1+\|\xi\|^2)^{-s/2}|\mathcal{F}\varphi(\xi',\xi_n)|(1+\|\xi\|^2)^{s/2}d\xi_n)^2 \le$$

$$(2\pi)^{-1}\int (1+\|\xi\|^2)^{-s}d\xi_n \int |\mathcal{F}\varphi(\xi',\xi_n)|^2(1+\|\xi\|^2)^s d\xi_n \le$$

$$(2\pi)^{-1}A(1+\|\xi'\|^2)^{-s+1/2}\int |\mathcal{F}\varphi(\xi',\xi_n)|^2(1+\|\xi\|^2)^s d\xi_n.$$

Отсюда имеем

$$\|\psi\|_{H_2^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \le (2\pi)^{-1}A\|\varphi\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.9}$$

Легко видеть, что

$$\gamma^k(\varphi) = \gamma^0\left(\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_n^k}\right),$$

поэтому из неравенства (2.9) получаем

$$\|\gamma^k(\varphi)\|_{H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} = \left\|\gamma^0\left(\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_n^k}\right)\right\|_{H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \le$$

$$(2\pi)^{-1}A\left\|\frac{\partial^k\varphi}{\partial x_n^k}\right\|_{H_2^{s-k}(\mathbb{R}^n)} \le (2\pi)^{-1}A\|\varphi\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Итак, при всех $k = 0, 1, \ldots, m$ имеет место неравенство

$$\|\gamma^k(\varphi)\|_{H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \le (2\pi)^{-1}A\|\varphi\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)},$$

где $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому из теоремы 3.9 следует, что оператор

$$\gamma^k : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$$

может быть продолжен до линейного непрерывного оператора

$$\gamma^k : H_2^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

с сохранением неравенства

$$\|\gamma^k(u)\|_{H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \le (2\pi)^{-1}A\|u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)},$$

где $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$.

2) Линейный непрерывный оператор

$$\varkappa : \prod_{k=0}^{m} H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow H_2^s(\mathbb{R}^n)$$

может быть построен в виде модифицированной формулы Тейлора.

Пусть $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$. Зададим

$$\varkappa(\psi_0, \ldots, \psi_m) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{m} \mathcal{F}\psi_k(\xi')\frac{1}{k!}x_n^k H(x_n(1+\|\xi'\|^2)^{1/2})\right),$$

где $H \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – такая пробная функция, что

$$H(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } |t| \le 1/2, \\ 0 \text{ при } |t| \ge 1, \end{cases}$$

а обратное преобразование Фурье взято по ξ'. Легко проверить, что

$$\varkappa(\psi_0, \ldots, \psi_m) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Пусть $\varphi = \varkappa(\psi_0, \ldots, \psi_m)$. Важно заметить, что $\gamma^k(\varphi) = \psi_k$ при всех $k = 0, \ldots, m$.

Получим оценку для нормы $\|\varphi\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}$. Легко видеть, что

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \sum_{k=0}^{m} \mathcal{F}\psi_k(\xi')\mathcal{F}\left(\frac{1}{k!}x_n^k H(x_n(1+\|\xi'\|^2)^{1/2})\right)(\xi_n) =$$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\mathcal{F}\psi_k(\xi')(1+\|\xi'\|^2)^{-(k+1)/2}(\mathcal{F}H)^{(k)}(\xi_n(1+\|\xi'\|^2)^{-1/2})).$$

Вместе с тем

$$\int |\mathcal{F}\psi_k(\xi')|^2(1+\|\xi'\|^2)^{-(k+1)}$$

$$|(\mathcal{F}H)^{(k)}(\xi_n(1+\|\xi'\|^2)^{-1/2})|^2(1+\|\xi'\|^2)^s d\xi =$$

$$\int |(\mathcal{F}H)^{(k)}(\xi_n)|^2(1+|\xi_n|^2)^s d\xi_n \int |\mathcal{F}\psi_k(\xi')|^2(1+\|\xi'\|^2)^{s-k-1/2}d\xi'.$$

Доказательство этого неравенства осуществляется заменой ξ_n на выражение $\xi_n(1+\|\xi'\|^2)^{1/2}$. Поэтому

$$\|\varphi\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} \le C\sum_{k=0}^{m} \|\psi_k\|_{H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

при достаточно большом C.

Теперь из теоремы 3.9 следует, что линейный оператор

$$\varkappa : \prod_{k=0}^{m} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

может быть продолжен до линейного непрерывного оператора

$$\varkappa : \prod_{k=0}^{m} H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow H_2^s(\mathbb{R}^n).$$

Сквозное отображение

$$\prod_{k=0}^{m} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \xrightarrow{\varkappa} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\gamma^0 \times \gamma^1 \times \cdots \times \gamma^m} \prod_{k=0}^{m} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$$

совпадает с тождественным. Из соображений непрерывности сквозное отображение

$$\prod_{k=0}^{m} H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \xrightarrow{\varkappa} H_2^s(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\gamma^0 \times \gamma^1 \times \cdots \times \gamma^m} \prod_{k=0}^{m} H_2^{s-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

также совпадает с тождественным. ■

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество. Определим пространство $H_2^s(\Omega)$ по правилу $H_2^s(\Omega) = \rho_\Omega\{H_2^s(\mathbb{R}^n)\}$.

Итак, $u \in H_2^s(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $u = v|_\Omega$ при некотором $v \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$.

Введем в рассмотрение пространство

$$H_2^s(\mathbb{R}^n/\Omega) = \{u \in H_2^s(\mathbb{R}^n) : u|_\Omega = 0\}.$$

Подпространство $H_2^s(\mathbb{R}^n/\Omega)$ замкнуто в пространстве $H_2^s(\mathbb{R}^n)$. Поэтому для любой функции $v_0 \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$ задача минимизации

$$\|v\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[v \in v_0 + H_2^s(\mathbb{R}^n/\Omega)]{} \min \tag{3.9}$$

имеет единственное решение $v^0 \in v_0 + H_2^s(\mathbb{R}^n/\Omega)$. Очевидно, что функция $v^0 \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда является решением задачи (3.9), когда $v^0|_\Omega = v_0|_\Omega$ и $v^0 \in H_2^s(\mathbb{R}^n/\Omega)^\perp$. Обозначим через

$$\pi_\Omega : H_2^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_2^s(\mathbb{R}^n/\Omega)$$

оператор, сопоставляющий функции u_0 решение v^0 задачи (3.9), где $v_0 \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$ такая функция, что $\rho_\Omega(v_0) = u_0$.

Т е о р е м а 5.9. *Линейные операторы*

$$\pi_\Omega : H_2^s(\mathbb{R}^n)^\perp \longrightarrow H_2^s(\mathbb{R}^n/\Omega)^\perp,$$
$$\rho_\Omega : H_2^s(\mathbb{R}^n/\Omega)^\perp \longrightarrow H_2^s(\mathbb{R}^n)^\perp$$

являются взаимно обратными линейными изоморфизмами.

Доказательство. Пусть $u \in H_2^s(\Omega)$ и $u \neq 0$. Тогда $(u, \varphi) \neq 0$ для некоторой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Пусть $v = \pi_\Omega(u)$. Тогда

$$(v, \varphi) = (u, \varphi) \neq 0,$$

поэтому $\pi_\Omega(u) \neq 0$. Отсюда следует, что линейный оператор π_Ω является мономорфизмом.

Пусть $v \in H_2^s(\mathbb{R}^n/\Omega)^\perp$. Зададим функцию $u = \rho_\Omega(v)$. Очевидно, что $\pi_\Omega(u) = v$, поэтому линейный оператор π_Ω является эпиморфизмом.

Из доказанного следует, что линейный оператор π_Ω является изоморфизмом. Однако оператор $\pi_\Omega \circ \rho_\Omega$ – тождественный. Поэтому линейные операторы π_Ω и ρ_Ω являются изоморфизмами. ■

Следствие. *Билинейная форма*

$$(u, v)_{H_2^s(\Omega)} = (\pi_\Omega(u), \pi_\Omega(v))_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}$$

является скалярным произведением в пространстве $H_2^s(\Omega)$. *Относительно этого скалярного произведения пространство* $H_2^s(\Omega)$ *является гильбертовым пространством с нормой*

$$\|u\|_{H_2^s(\Omega)} = \|\pi_\Omega(u)\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)},$$

поэтому линейный оператор

$$\pi_\Omega : H_2^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_2^s(\mathbb{R}^n/\Omega)^\perp$$

является изометрическим изоморфизмом.

Фактически элементы пространства $H_2^s(\Omega)$ могут быть отождествлены с их образами в пространстве $H_2^s(\mathbb{R}^n/\Omega^\perp)$ при отображении π_Ω. Однако такое отождествление не всегда удобно.

Пусть $s > 0$ и натуральное $m < s - n/2$. Тогда из теоремы 2.9 следует, что $H_2^s(\Omega) \subset C^m(\mathrm{Cl}\,\Omega)$. В данном случае оператор вложения действует по правилу

$$u \mapsto \pi_\Omega(u)|_{\mathrm{Cl}\,\Omega},$$

где $u \in H_2^s(\Omega)$.

Теорема 6.9. *Пусть* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. *Линейный оператор*

$$\varphi^\bullet : H_2^s(\Omega) \longrightarrow H_2^s(\Omega),$$

определенный по правилу

$$\varphi^\bullet : u \mapsto \varphi u,$$

непрерывен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$. Возьмем $t > |s| + n/2$ и зададим

$$\gamma = (2\pi)^{-n/2} \int (1 + \|\xi\|^2)^{|s|-t} d\xi.$$

Пусть

$$F = (2\pi)^{n/2} |\mathcal{F}u| * |\mathcal{F}\varphi|,$$

тогда имеем

$$|F(x)|^2 = \left(\int |\mathcal{F}\varphi(y)| |\mathcal{F}u(x-y)| dy \right)^2 \leq$$
$$\|\varphi\|_{H_2^t(\mathbb{R}^n)} \int |\mathcal{F}u(x-y)|^2 (1 + \|y\|^2)^{-t} dy.$$

Из легко проверяемого неравенства

$$(1 + \|x+y\|^2)^s \leq 2^{|s|} (1 + \|x\|^2)^s (1 + \|y\|^2)^{|s|}$$

следует, что

$$\int |F(x)|^2 (1 + \|x\|^2)^s dx \leq 2^{|s|} \gamma \|\varphi\|^2_{H_2^t(\mathbb{R}^n)} \|u\|^2_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Так как

$$|\mathcal{F}(\varphi u)| = (2\pi)^{n/2} |(\mathcal{F}u) * (\mathcal{F}\varphi)| \leq (2\pi)^{n/2} |\mathcal{F}u| * |\mathcal{F}\varphi| = F,$$

то имеет место оценка

$$\|\varphi u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} \leq A \|u\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}$$

при всех $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$ с константой

$$A = (2^{|s|} \gamma)^{1/2} \|\varphi\|_{H_2^t(\mathbb{R}^n)}.$$

Поэтому оператор $\varphi^\bullet$ непрерывен.

2) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное открытое множество. Возьмем функцию $u \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$. Из п. 1) следует, что $\varphi\pi_\Omega(u) \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$. Так как $(\varphi\pi_\Omega(u))|_\Omega = \varphi u$, то $\varphi u \in H_2^s(\Omega)$. Из оценки

$$\|\varphi u\|_{H_2^s(\Omega)} = \|\pi_\Omega(\varphi u)\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} \leq$$
$$\|\varphi\pi_\Omega(u)\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\pi_\Omega(u)\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)} = C \|u\|_{H_2^s(\Omega)}$$

вытекает непрерывность оператора $\varphi^\bullet$ в общем случае. ■

Дадим определение локального пространства $H_2(\Omega)^{\mathrm{loc}}$.

Пусть задано открытое множество $\omega \subset \Omega$. Будем жирное включение $\omega \Subset \Omega$ использовать в тех случаях, когда замыкание $\mathrm{Cl}\,\omega$ множества ω компактно и $\mathrm{Cl}\,\omega \subset \Omega$.

Пространство $H_2^s(\Omega)^{\mathrm{loc}}$ образовано из таких $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, что

$$u|_\omega \in H_2^s(\omega)$$

при всех $\omega \Subset \Omega$. Величина

$$p_\omega(u) = \|u|_\omega\|_{H_2^s(\Omega)}$$

является полунормой в пространстве $H_2^s(\Omega)^{\mathrm{loc}}$. Система полунорм

$$p_\omega, \quad \omega \Subset \Omega$$

превращает линейное пространство $H_2^s(\Omega)^{\mathrm{loc}}$ в линейное топологическое пространство.

Пусть $s > 0$ и натуральное $m < s - n/2$. Тогда из теоремы 2.9 следует, что имеет место вложение $H_2^s(\Omega)^{\mathrm{loc}} \subsetneq C^m(\Omega)$.

Т е о р е м а 7.9. *Включение $u \in H_2^s(\Omega)^{\mathrm{loc}}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi u \in H_2^s(\Omega)$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть заданы $u \in H_2^s(\Omega)^{\mathrm{loc}}$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Из компактности носителя $\operatorname{supp}\varphi$ следует существование таких окрестностей $\omega_1, \ldots, \omega_k \Subset \Omega$, что

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup_{i=1}^k \omega_i,$$
$$u|_{\omega_i} \in H_2^s(\omega_i), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Пусть $u|_{\omega_i} = v_i|_{\omega_i}$, $v_i \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \ldots, k$. Возьмем такие функции $\psi_i \in C_0^\infty(\Omega)$, что $\psi_1 + \cdots + \psi_k = 1$ на носителе $\operatorname{supp}\varphi$. Тогда

$$\varphi u = \sum_{i=1}^k \psi_i \varphi v_i$$

в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Из теоремы 6.9 следует, что при всех i

$$\psi_i \varphi v_i \in H_2^s(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому $\varphi u \in H_2^s(\Omega)$.

Достаточность. Пусть $\omega \Subset \Omega$. Возьмем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, равную единице в некоторой окрестности множества $\mathrm{Cl}\,\omega$. Тогда $u = \varphi u$ в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Заметим, что $\varphi u \in H_2^s(\Omega)$, поэтому $u|_\omega \in H_2^s(\omega)$. ■

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество, l - натуральное число и $0 < s < 1$.

Через $W_2^l(\Omega)$ обозначается пространство всех таких распределений $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, что $\partial^\alpha u \in L_2(\Omega)$ при всех $|\alpha| \le l$. Пространство $W_2^l(\Omega)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le l} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L_2(\Omega)}.$$

Через $W_2^{l+s}(\Omega)$ обозначается пространство всех таких распределений $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, что $\partial^\alpha u \in L_2(\Omega)$ при всех $|\alpha| \le l$ и

$$\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}} dxdy < \infty$$

при всех $|\alpha| = l$. Пространство $W_2^{l+s}(\Omega)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^{l+s}(\Omega)} = (u,v)_{W_2^l(\Omega)} +$$
$$\sum_{|\alpha|=l} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{(\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y))\overline{(\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y))}}{\|x-y\|^{n+2s}} dxdy.$$

Пусть $s \ge 0$. Пространство $W_2^s(\Omega)$ называется пространством Соболева. Через $\overset{0}{W}{}_2^s(\Omega)$ обозначается замыкание пространства пробных функций $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве Соболева $W_2^s(\Omega)$.

Следующая теорема устанавливает, что при $s \ge 0$ пространство Соболева $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством бесселевых потенциалов $H_2^s(\mathbb{R}^n)$.

Т е о р е м а 1.10. *Пусть $s \ge 0$. Тогда $W_2^s(\mathbb{R}^n) = H_2^s(\mathbb{R}^n)$, при этом нормы $\|\cdot\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)}$ и $\|\cdot\|_{H_2^s(\mathbb{R}^n)}$ эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть целое $l \ge 0$ и вещественное $0 < s < 1$.

1) Пусть $u \in H_2^l(\mathbb{R}^n)$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\int |\mathcal{F}u(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|^2)^l d\xi \ge \sum_{|\alpha|\le l} C_l^{|\alpha|} \|\partial^\alpha u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

поэтому $\partial^\alpha u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ при всех $|\alpha| \le l$. Отсюда следует, что имеет место включение $u \in W_2^l(\mathbb{R}^n)$. Аналогично из включения $u \in W_2^l(\mathbb{R}^n)$ следует включение $u \in H_2^l(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $W_2^l(\mathbb{R}^n) = H_2^l(\mathbb{R}^n)$.

Эквивалентность норм $\|\cdot\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)}$ и $\|\cdot\|_{H_2^l(\mathbb{R}^n)}$ очевидна.

2) Пусть $u \in H_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $u \in H_2^l(\mathbb{R}^n)$, поэтому из п. 1) следует, что $\partial^\alpha u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ при всех $|\alpha| \le l$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\sum_{|\alpha|=l} \iint \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}} dxdy =$$

$$\sum_{|\alpha|=l} \iint \frac{|\partial^\alpha u(x+y) - \partial^\alpha u(y)|^2}{\|x\|^{n+2s}} dxdy =$$

$$\iint \frac{|e^{-i(x,\xi)} - 1|^2}{\|x\|^{n+2s}} \|\xi\|^{2l} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 dxd\xi = A_s \|\xi\|^{2l+2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi,$$

где величина

$$A_s^{-1} = \|\xi\|^{-2s} \int \frac{|e^{-i(x,\xi)} - 1|^2}{\|x\|^{n+2s}} dx$$

от ξ не зависит. Далее имеем

$$J(u) = \int |\mathcal{F}u(\xi)|^2 [(1 + \|\xi\|^2)^l + \|\xi\|^{2l+2s}] d\xi =$$

$$\sum_{|\alpha|\le l} C_l^{|\alpha|} \|\partial^\alpha u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} + A_s \sum_{|\alpha|=l} \iint \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}} dxdy.$$

Отметим существование таких постоянных $0 < C_0 < C_1$, что

$$C_0(1 + \|\xi\|^2)^{l+s} \le (1 + \|\xi\|^2)^l + \|\xi\|^{2l+2s} \le C_1(1 + \|\xi\|^2)^{l+s}$$

при всех $\xi \in \mathbb{R}^n X$. Поэтому

$$C_0 \|u\|^2_{H_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)} \le J(u) \le C_1 \|u\|^2_{H_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда следует, что $u \in W_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)$. Аналогичным образом из включения $u \in W_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)$ следует включение $u \in H_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому имеет место равенство $W_2^{l+s}(\mathbb{R}^n) = H_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)$.

Эквивалентность норм $\|\cdot\|_{W_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)}$ и $\|\cdot\|_{H_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)}$ очевидна. ■

Далее нас будут интересовать следующие две задачи, связанные с пространством Соболева $W_2^l(\Omega)$. Во-первых, может ли произвольная функция $u \in W_2^l(\Omega)$ быть продолжена до функции $v \in W_2^l(\mathbb{R}^n)$? И во-вторых, при каких условиях функция $u \in W_2^l(\Omega)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$? Ответы на эти два вопроса будут даны только

в том случае, когда область Ω имеет достаточно гладкую границу $\mathrm{Fr}\,\Omega$. В этом случае ответы на сформулированные вопросы не требуют слишком сложной техники и фактически сводятся к случаю полупространства

$$\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}.$$

При более сложных границах ответы на эти вопросы более сложные.

Пусть

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-) = \rho_{\mathbb{R}^n_-}\{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-)\}.$$

Следующая теорема аналогична теореме 3.9.

Т е о р е м а 2.10. *Подпространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ плотно в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$, а $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – шапочка.

Очевидно, что

$$u = \lim_{r\to\infty} (\chi_{r\mathbb{D}^n} * h)u$$

в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n)$. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $\operatorname{supp} u \subset r\mathbb{D}^n$ при достаточно большом $r > 0$. Пусть

$$E_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

Зададим

$$u_\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_n \geq \delta, \\ u(x - \delta E_n) & \text{при } x_n < \delta. \end{cases}$$

Тогда из теоремы 3.8 следует, что

$$u = \lim_{\delta\to 0} u_\delta$$

в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\varphi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – такая функция, что

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_n \leq \delta/3, \\ 0 & \text{при } x_n \geq 2\delta/3. \end{cases}$$

Тогда функция $\varphi_\delta u_\delta$ принадлежит пространству $W_2^l(\mathbb{R}^n)$ и имеет компактный носитель. Из теоремы 1.8 следует, что

$$\varphi_\delta u_\delta = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon * (\varphi_\delta u_\delta)$$

в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n)$, где $h(x) = \varepsilon^{-n} h(\varepsilon^{-1}x)$. Поэтому

$$u_\delta = \lim_{\varepsilon\to 0} \rho_{\mathbb{R}^n_-}(h_\varepsilon * (\varphi_\delta u_\delta))$$

в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n)$. Остается заметить, что функция $h_\varepsilon * (\varphi_\delta u_\delta) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, следовательно, функция $\rho_{\mathbb{R}^n}\{h_\varepsilon * (\varphi_\delta u_\delta)\} \in \mathcal{S}^n(\mathbb{R}^n_-)$. ■

Т е о р е м а 3.10. *Существует линейный непрерывный оператор*

$$\tau_{\mathbb{R}^n_-} : W_2^l(\mathbb{R}^n_-) \longrightarrow W_2^l(\mathbb{R}^n)$$

такой, что сквозное отображение

$$W_2^l(\mathbb{R}^n_-) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}^n_-}} W_2^l(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\rho_{\mathbb{R}^n_-}} W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$$

совпадает с тождественным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-)$. Продолжим функцию φ по непрерывности на множество $\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n_-$ и определим

$$\tau_{\mathbb{R}^n_-}(\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x_n \le 0, \\ \sum_{k=1}^{l+1} a_k \varphi(x', -kx_n) & \text{при } x_n > 0. \end{cases}$$

Зададим $a_1, \ldots, a_{l+1}$ так, чтобы при всех $m = 0, 1, \ldots, l$ было выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{l+1} (-k)^m a_k = 1,$$

в таком случае $\tau_{\mathbb{R}^n_-}(\varphi) \in C^l(\mathbb{R}^n)$ и существует такое C, что

$$\|\tau_{\mathbb{R}^n_-}(\varphi)\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)} \le C \|\varphi\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)}$$

при $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-)$. Из теоремы 2.10 следует, что линейный оператор

$$\tau_{\mathbb{R}^n_-} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-) \longrightarrow C^l(\mathbb{R}^n)$$

может быть продолжен до линейного непрерывного оператора

$$\tau_{\mathbb{R}^n_-} : W_2^l(\mathbb{R}^n_-) \longrightarrow W_2^l(\mathbb{R}^n),$$

при этом сквозное отображение

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-) \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}^n_-}} C^l(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\rho_{\mathbb{R}^n_-}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

совпадает с тождественным. Поэтому из соображений непрерывности получаем требуемое утверждение. ■

Из теоремы 3.10 следует, что каждая функция $u \in W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$ может быть продолжена до некоторой функции $v \in W_2^l(\mathbb{R}^n)$. Отсюда

вытекает, что $W_2^l(\mathbb{R}^n_-) = H_2^l(\mathbb{R}^n_-)$ и нормы $\|\cdot\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)}$ и $\|\cdot\|_{H_2^l(\mathbb{R}^n_-)}$ эквивалентны.

Пусть $k \geq 0$ – целое число. Обозначим через

$$\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$$

оператор, определяемый по правилу

$$\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} : \varphi \mapsto \gamma^k(\psi),$$

где $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-)$, а $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ такая функция, что $\varphi = \rho_{\mathbb{R}^n_-}(\psi)$. Очевидно, что определение линейного оператора $\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-}$ корректно – функция $\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-}(\varphi) = \gamma^k(\psi)$ не зависит от выбора функции $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей равенству $\varphi = \rho_{\mathbb{R}^n_-}(\psi)$.

Следующая теорема аналогична теореме 4.9.

Т е о р е м а 4.10. *При всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$ линейный оператор*

$$\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$$

единственным образом продолжается до линейного непрерывного оператора

$$\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} : W_2^l(\mathbb{R}^n_-) \longrightarrow W_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

При этом для линейного непрерывного оператора

$$\gamma^0_{\mathbb{R}^n_-} \times \gamma^1_{\mathbb{R}^n_-} \times \cdots \times \gamma^{l-1}_{\mathbb{R}^n_-} : W_2^l(\mathbb{R}^n_-) \longrightarrow \prod_{k=0}^{l-1} W_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

существует такой линейный непрерывный оператор

$$\varkappa_{\mathbb{R}^n_-} : \prod_{k=0}^{l-1} W_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow W_2^l(\mathbb{R}^n_-),$$

что сквозное отображение

$$\prod_{k=0}^{l-1} W_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \xrightarrow{\varkappa_{\mathbb{R}^n_-}} W_2^l(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\gamma^0_{\mathbb{R}^n_-} \cdots \gamma^{l-1}_{\mathbb{R}^n_-}} \prod_{k=0}^{l-1} W_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

совпадает с тождественным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k = 0, 1, \ldots, l-1$ и $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-)$ имеет место равенство

$$\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-(\varphi)} = \gamma^k(\tau_{\mathbb{R}^n_-(\varphi)}).$$

Поэтому из теоремы 2.10 следует, что оператор

$$\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} : W_2^l(\mathbb{R}^n_-) \longrightarrow W_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

может быть определен как суперпозиция $\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} = \gamma^k \circ \tau_{\mathbb{R}^n_-}$ операторов

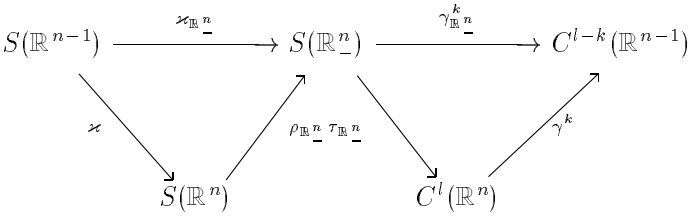
$$\tau_{\mathbb{R}^n_-} : W_2^l(\mathbb{R}^n_-) \longrightarrow W_2^l(\mathbb{R}^n),$$
$$\gamma^k : W_2^l(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Здесь на основании теоремы 1.10 учитывается, что

$$W_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) = H_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}),$$
$$W_2^l(\mathbb{R}^n) = H_2^l(\mathbb{R}^n).$$

Положим $\varkappa_{\mathbb{R}^n_-} = \rho_{\mathbb{R}^n_-} \circ \varkappa$. Тогда линейный оператор $\varkappa_{\mathbb{R}^n_-}$ непрерывен как суперпозиция двух линейных непрерывных операторов.

При $k = 0, \ldots, l-1$ диаграмма



коммутативна. Поэтому из равенства

$$\gamma^k \circ \tau_{\mathbb{R}^n_-} \circ \rho_{\mathbb{R}^n_-} \circ \varkappa = I$$

следует, что

$$\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} \circ \varkappa_{\mathbb{R}^n_-} = I.$$

Отсюда вытекает, что сквозное отображение

$$\prod_{k=0}^{l-1} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1}) \xrightarrow{\varkappa_{\mathbb{R}^n_-}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_-) \xrightarrow{\gamma^0_{\mathbb{R}^n_-} \times \cdots \times \gamma^{l-1}_{\mathbb{R}^n_-}} \prod_{k=0}^{l-1} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$$

совпадает с тождественным. Из соображений непрерывности получаем требуемое. ■

Т е о р е м а 5.10. *Пусть функция* $u \in W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$ *удовлетворяет равенству* $\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} u = 0$ *при всех* $k = 0, 1, \ldots, l-1$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая функция* $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_-)$, *что* $0 \le w \le 1$ *и*

$$\|u - wu\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} \le \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $H \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – шапочки. Введем в рассмотрение функции

$$\varphi_\delta(x) = (\chi_{(-\infty,-2\delta]} * h_\delta)(x_n),$$
$$\Phi_\delta(x) = (\chi_{\delta^{-1}\mathbb{D}^n} * H)(x)$$

и докажем, что функцию w можно искать в виде

$$w = \varphi_{\delta_1} \Phi_{\delta_2},$$

где $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ - достаточно малые величины.

Пусть $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Оценим норму $\|\psi - \varphi_\delta \psi\|_{W_2^1(\mathbb{R}^n_-)}$. Зададим

$$\Omega_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : -3\delta < x_n < 0\}.$$

Пусть $|\alpha| \le l$ и $\alpha = (\alpha', m)$. Если $m = 0$, то

$$\|\partial^\alpha \psi - \partial^\alpha(\varphi_\delta \psi)\|_{L_2(\mathbb{R}^n_-)} = \|\partial^\alpha \psi - \varphi_\delta \partial^\alpha \psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n_-)} \le \|\partial^\alpha \psi\|_{L_2(\Omega_\delta)}.$$

Пусть $m \ge 1$. Тогда

$$\partial^\alpha(\varphi_\delta \psi) = \varphi_\delta \partial^\alpha \psi + \sum_{k=1}^m C_m^k \frac{\partial^k \varphi_\delta}{\partial x_n^k} \partial^{\alpha'} \frac{\partial^{m-k} \psi}{\partial x_n^{m-k}}.$$

Поэтому имеем

$$\|\partial^\alpha \psi - \partial^\alpha(\varphi_\delta \psi)\|_{L_2(\mathbb{R}^n_-)} \le \|\partial^\alpha \psi - \varphi_\delta \partial^\alpha \psi\|_{L_2(\mathbb{R}^n_-)} +$$
$$\sum_{k=1}^m C_m^k \left\| \frac{\partial^k \varphi_\delta}{\partial x_n^k} \partial^{\alpha'} \frac{\partial^{m-k} \psi}{\partial x_n^{m-k}} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^n_-)}.$$

Вместе с тем

$$\left\| \frac{\partial^k \varphi_\delta}{\partial x_n^k} \right\|_{C^0(\mathbb{R}^n_-)} \le \delta^{-k} \int_{-1}^1 |h^{(k)}(t)| dt,$$

поэтому при достаточно большом C имеет место неравенство

$$\|\partial^\alpha\psi - \partial^\alpha(\varphi_\delta\psi)\|_{L_2(\mathbb{R}^n_-)} \le \|\partial^\alpha\psi\|_{L_2(\Omega_\delta)} + C\sum_{k=1}^{m}\delta^{-k}\left\|\partial^{\alpha'}\frac{\partial^{m-k}\psi}{\partial x_n^{m-k}}\right\|_{L_2(\Omega_\delta)}.$$

Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме для функции $\partial^{\alpha'}(\partial^{m-k}\psi(x',x_n)/\partial x_n^{m-k})$ по переменной x_n

$$\partial^{\alpha'}\frac{\partial^{m-k}\psi}{\partial x_n^{m-k}}(x',x_n) =$$
$$\sum_{i=0}^{k-1}\partial^{\alpha'}\frac{\partial^{m-k+i}}{\partial x_n^{m-k+i}}\psi(x',0)\frac{x_n^i}{i!} + \int_0^{x_n}\partial^\alpha\psi(x',t)\frac{(x_n-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt.$$

Отсюда при достаточно больших C и $C_0(\delta),\dots,C_{k-1}(\delta)$ следует, что

$$\delta^{-k}\left\|\partial^{\alpha'}\frac{\partial^{m-k}\psi}{\partial x_n^{m-k}}\right\|_{L_2(\Omega_\delta)} \le$$
$$C\|\partial^\alpha\psi\|_{L_2(\Omega_\delta)} + \sum_{i=1}^{k-1}C_i(\delta)\|\partial^{\alpha'}\gamma^{m-k+i}\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Из неравенств $|\alpha'| \le l-m$ и $0 \le m-k+i \le m-1$ следует, что при достаточно больших C и $C_0(\delta),\dots,C_{m-1}(\delta)$ имеет место неравенство

$$\|\partial^\alpha\psi - \partial^\alpha(\varphi_\delta\psi)\|_{L_2(\mathbb{R}^n_-)} \le$$
$$C\|\partial^\alpha\psi\|_{L_2(\Omega_\delta)} + \sum_{k=0}^{m-1}C_k(\delta)\|\partial^{\alpha'}\gamma^k\psi\|_{L_2(\mathbb{R}^{n-1})} \le$$
$$C\|\partial^\alpha\psi\|_{L_2(\Omega_\delta)} + \sum_{k=0}^{m-1}C_k(\delta)\|\gamma^k\psi\|_{W_2^{l-k-1}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Таким образом, при достаточно больших C и $C_0(\delta),\dots,C_{l-1}(\delta)$ приходим к неравенству

$$\|\psi - \varphi_\delta\psi\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} \le C\|\psi\|_{W_2^l(\Omega_\delta)} + \sum_{k=0}^{l-1}C_k(\delta)\|\gamma^k\psi\|_{W_2^{l-k-1}(\mathbb{R}^{n-1})}. \quad (1.10)$$

Зададим $v = \tau_{\mathbb{R}^n_-}u$. Тогда $\gamma^k v = 0$ при всех $k = 0,1,\dots,l-1$.

Пусть в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ взята такая последовательность функций $\psi_1, \psi_2, \ldots$, что

$$v = \lim_{m\to\infty} \psi_m \tag{2.10}$$

в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n)$. Тогда из теорем 4.9 и 1.10 следует, что

$$\gamma^k v = \lim_{m\to\infty} \gamma^k \psi_m \tag{3.10}$$

в пространстве $W_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$. Тем более этот предел имеет место в пространстве $W_2^{l-k-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$. Поэтому из неравенства (1.10), записанного для ψ_m, и пределов (2.10) и (3.10) получаем

$$\|v - \varphi_\delta v\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} \le C\|v\|_{W_2^l(\Omega_\delta)}.$$

Отсюда следует оценка

$$\|u - \varphi_\delta u\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} \le C\|u\|_{W_2^l(\Omega_\delta)}.$$

Подберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$C\|u\|_{W_2^l(\Omega_{\delta_1})} \le \varepsilon/2.$$

Далее подберем $\delta_2 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$\|\varphi_{\delta_1} u - \varphi_{\delta_1}\Phi_{\delta_2} u\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} \le \varepsilon/2.$$

Тогда

$$\|u - \varphi_{\delta_1}\Phi_{\delta_2} u\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} \le$$
$$\|u - \varphi_{\delta_1} u\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} + \|\varphi_{\delta_1} u - \varphi_{\delta_1}\Phi_{\delta_2} u\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} \le$$
$$\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

поэтому функция $w = \varphi_{\delta_1}\Phi_{\delta_2}$ удовлетворяет всем требованиям. ■

Т е о р е м а 6.10. *Включение* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\mathbb{R}^n_-)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $u \in W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$ *и* $\gamma^k_{\mathbb{R}^n} u = 0$ *при всех* $k = 0, 1, \ldots, l-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\mathbb{R}^n_-)$. Возьмем в пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую последовательность пробных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, что

$$u = \lim_{m\to\infty} \varphi_m$$

в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$. Из теоремы 4.10 следует, что

$$\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} u = \lim_{m\to\infty} \gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} \varphi_m$$

в пространстве $W_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^n_-)$ при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$. Однако $\gamma_{\mathbb{R}^n_-}\varphi_m = 0$, поэтому $\gamma_{\mathbb{R}^n_-} u = 0$ при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$.

Достаточность. Пусть функция $u \in W_2^l(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет равенствам $\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} u = 0$ при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$. Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_-)$ так, что

$$\|u - wu\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} \le \varepsilon/2.$$

Возможность этого выбора гарантируется теоремой 5.10. Будем считать, что функция wu продолжена нулем вне множества $\mathbb{R}^n_-$. Подберем $\delta > 0$ так, что $h_\delta * (wu) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_-)$ и

$$\|wu - h_\delta * (wu)\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} \le \varepsilon/2,$$

где $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – шапочка. Теперь

$$\|u - h_\delta * (wu)\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} \le$$
$$\|u - wu\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} + \|wu - h_\delta * (wu)\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n_-)} \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Следовательно, $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\mathbb{R}^n_-)$. ■

Т е о р е м а 7.10. *Включение $u \in W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\lambda_{\mathbb{R}^n_-} u \in W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\mathbb{R}^n_-)$. Возьмем в пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n_-)$ такую последовательность пробных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, что

$$u = \lim_{k\to\infty} \varphi_k$$

в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$. Очевидно, что в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n)$ последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ является фундаментальной. Поэтому существует такая функция $v \in W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$, что

$$v = \lim_{k\to\infty} \varphi_k$$

в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, что

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при } x_n \le 0, \\ 0 & \text{при } x_n \ge 0, \end{cases}$$

поэтому $v = \lambda_{\mathbb{R}^n_-} u \in W_2^l(\mathbb{R}^n)$.

Достаточность. Пусть $v = \lambda_{\mathbb{R}^n_-} u \in W_2^l(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$v = \lim_{\delta \to 0} v(\cdot + \delta E_n)$$

в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$, поэтому

$$u = \lim_{\delta \to 0} v(\cdot + \delta E_n)$$

в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n)$. Легко видеть, что $\gamma^k v(\cdot + \delta E_n) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, l-1$, поэтому $\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-} u = 0$ при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$ и из теоремы 11.2 следует, что $u \in W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$. ■

Далее считаем, что множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и его замыкание $\mathrm{Cl}\,\Omega$ является бесконечно дифференцируемым многообразием с краем $\partial\Omega$. Наша цель - сделать обобщение доказанных в этом параграфе теорем на случай пространства $W_2^l(\Omega)$. Основным техническим приемом, позволяющим это обобщение осуществить, является локальное распрямление края $\partial\Omega$ многообразия $\mathrm{Cl}\,\Omega$. После такого распрямления композиция с соответствующим диффеоморфизмом сводит задачу к рассмотренному выше случаю пространства $W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$.

Приступая к реализации намеченной программы, докажем вначале одну теорему о композиции с диффеоморфизмом.

Пусть $K \subset \omega \Subset \mathbb{R}^n$, где K – компактное, а ω – открытое подмножество. Зададим пространство

$$W_2^s(\omega, K) = \{u \in W_2^s(\omega) : \operatorname{supp} u \subset K\}.$$

Т е о р е м а 8.10. *Пусть*

$$F : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$$

– диффеоморфизм, где $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ – открытые подмножества. Зададим $K_1 \subset \omega_1 \Subset \Omega_1$, где K_1 – компактное, а ω_1 – открытое подмножества, и положим $K_2 = F(K_1)$, $\omega_2 = F(\omega_1)$. Тогда линейные операторы

$$A_F : W_2^l(\omega_2) \longrightarrow W_2^l(\omega_1), \tag{4.10}$$

$$B_F : W_2^{l+s}(\omega_2, K_2) \longrightarrow W_2^{l+s}(\omega_1, K_1), \tag{5.10}$$

где $0 < s < 1$, определяемые по правилу $u \mapsto u \circ F$, являются непрерывными изоморфизмами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = F^{-1}$.

1) Докажем непрерывность и изоморфность оператора (4.10). Если $|\alpha| \le l$ и $u \in W_2^l(\omega_2)$, то

$$\partial^\alpha (u \circ F) = \sum_{\beta \le \alpha} (\partial^\beta u \circ F) F_\beta,$$

где $F_\beta \in C^\infty(\Omega_1)$. Поэтому

$$\int\limits_{\omega_1} |\partial^\alpha u(F(x))|^2 dx = \int\limits_{\omega_1} \left| \sum_{\beta \le \alpha} \partial^\beta u(F(x)) F_\beta(x) \right|^2 dx \le$$

$$C \sum_{\beta \le \alpha} \int\limits_{\omega_1} |\partial^\beta u(F(x))|^2 F_\beta(x)|^2 dx \le C \sum_{\beta \le \alpha} \int\limits_{\omega_1} |\partial^\beta u(F(x))|^2 dx =$$

$$C \sum_{\beta \le \alpha} \int\limits_{\omega_2} |\partial^\beta u(x)|^2 |J_H(x)| dx \le C \sum_{\beta \le \alpha} \int\limits_{\omega_2} |\partial^\beta u(x)|^2 dx.$$

Отсюда следует существование такого $C > 0$, что

$$\|u \circ F\|_{W_2^l(\omega_1)} \le C \|u\|_{W_2^l(\omega_2)}$$

при всех $u \in W_2^l(\omega_2)$. Поэтому линейный оператор A_F непрерывен. Очевидно, что линейный оператор

$$A_H : W_2^l(\omega_1) \longrightarrow W_2^l(\omega_2)$$

является обратным для A_F. Поэтому A_F – непрерывный изоморфизм.

2) Приступая к доказательству непрерывности и изоморфности оператора (5.10), докажем следующее вспомогательное утверждение.

Докажем, что линейный оператор

$$\lambda_\omega : W_2^{l+s}(\omega, K) \longrightarrow W_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)$$

непрерывен.

Пусть $u \in \overset{0}{W}{}_2^{l+s}(\omega, K)$. Проверим, что $\lambda_\omega u \in W_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)$. Пусть $v = \lambda_\omega u$. Включение $v \in W_2^l(\mathbb{R}^n)$ очевидно. Пусть $|\alpha| = l$. Тогда

$$\iint \frac{|\partial^\alpha v(x) - \partial^\alpha v(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}} dxdy = \int\limits_\omega \int\limits_\omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}} dxdy +$$

$$\int\limits_\omega \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \omega} \frac{|\partial^\alpha u(x)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}} dxdy + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \omega} \int\limits_\omega \frac{|\partial^\alpha u(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}} dxdy =$$

$$\int\limits_{\omega}\int\limits_{\omega}\frac{|\partial^{\alpha}u(x)-\partial^{\alpha}u(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}}dxdy+\int\limits_{K}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\omega}\frac{|\partial^{\alpha}u(x)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}}dxdy+$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\omega}\int\limits_{K}\frac{|\partial^{\alpha}u(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}}dxdy=$$

$$\int\limits_{\omega}\int\limits_{\omega}\frac{|\partial^{\alpha}u(x)-\partial^{\alpha}u(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}}dxdy+2C\int\limits_{K}|\partial^{\alpha}u(x)|^2dx.$$

Константа C имеет вид

$$C=\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus r\,\mathbb{D}^n}\frac{dy}{\|y\|^{n+2s}},$$

где r – расстояние от компактного множества K до замкнутого множества $\mathbb{R}^n\setminus\omega$. Отсюда следует существование такого C, что

$$\|\lambda_{\omega}u\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|_{W_2^{l+s}(\omega)}$$

при всех $u\in\overset{0}{W}{}_2^{l+s}(\omega,K)$.

3) Докажем непрерывность и изоморфность оператора (5.10). Пусть $u\in\overset{0}{W}{}_2^{l+s}(\omega_2,K_2)$. Тогда $B_Fu\in\overset{0}{W}{}_2^{l+s}(\omega_1,K_1)$. Пусть $|\alpha|=l$. Тогда

$$\int\limits_{\omega_1}\int\limits_{\omega_1}\frac{|\partial^{\alpha}u(F(x))-\partial^{\alpha}u(F(y))|^2}{\|x-y\|^{n+2s}}dxdy=$$

$$\int\limits_{\omega_1}\int\limits_{\omega_1}\frac{\left|\sum\limits_{|\beta|\le l}\{\partial^{\alpha}u(F(x))F_{\beta}(x)-\partial^{\alpha}u(F(y))F_{\beta}(y)\}\right|^2}{\|x-y\|^{n+2s}}dxdy\le$$

$$C\sum_{|\beta|\le l}\int\limits_{\omega_1}\int\limits_{\omega_1}\frac{|\partial^{\beta}u(F(x))F_{\beta}(x)-\partial^{\beta}u(F(y))F_{\beta}(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}}dxdy\le$$

$$\sum_{|\beta|\le l}\left\{\int\limits_{\omega_1}\int\limits_{\omega_1}|\partial^{\beta}u(F(x))|^2\frac{|F_{\beta}(x)-F_{\beta}(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}}dxdy+\right.$$

$$\left.\int\limits_{\omega_1}\int\limits_{\omega_1}\frac{|\partial^{\beta}u(F(x))-\partial^{\beta}u(F(y))|^2}{\|x-y\|^{n+2s}}|F_{\beta}(y)|^2dxdy\right\}=$$

$$C\sum_{|\beta|\le l}\left\{\int\limits_{\omega_1}|\partial^\beta u(F(x))|^2dx+\int\limits_{\omega_1}\int\limits_{\omega_1}\frac{|\partial^\beta u(F(x))-\partial^\beta u(F(y))|^2}{\|x-y\|^{n+2s}}dxdy\right\}=$$

$$C\left\{\sum_{|\beta|\le l}\int\limits_{\omega_2}|\partial^\beta u(x)|^2|J_H(x)|dx+\right.$$

$$\left.\sum_{|\beta|\le l}\int\limits_{\omega_2}\int\limits_{\omega_2}\frac{|\partial^\beta u(x)-\partial^\beta u(y)|^2}{\|H(x)-H(y)\|^{n+2s}}|J_H(x)||J_H(y)|dxdy\right\}\le$$

$$C\sum_{|\beta|\le l}\left\{\int\limits_{\omega_2}|\partial^\beta u(x)|^2dx+\int\limits_{\omega_2}\int\limits_{\omega_2}\frac{|\partial^\beta u(x)-\partial^\beta u(y)|^2}{\|x-y\|^{n+2s}}\right\}dxdy\le$$

$$C\sum_{|\beta|\le l}\|\lambda_{\omega_2}u\|^2_{W_2^{|\beta|+s}(\mathbb{R}^n)}\le C\sum_{|\beta|\le l}\|\lambda_{\omega_2}u\|^2_{W_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|^2_{W_2^{l+s}(\omega_2)}.$$

Отсюда следует существование такого $C>0$, что

$$\|u\circ F\|_{W_2^{l+s}(\omega_1)}\le C\|u\|_{W_2^{l+s}(\omega_2)}$$

при всех $u\in\overset{\circ}{W}{}_2^{l+s}(\omega_2,K_2)$. Поэтому линейный оператор B_F непрерывен. Очевидно, линейный оператор

$$B_H:\overset{\circ}{W}{}_2^{l+s}(\omega_1,K_1)\longrightarrow\overset{\circ}{W}{}_2^{l+s}(\omega_2,K_2)$$

является обратным для B_F. Поэтому B_F – непрерывный изоморфизм. ■

Опишем процедуру локального распрямления края $\partial\Omega$ многообразия $\mathrm{Cl}\,\Omega$ в точке $x\in\partial\Omega$. Обозначим через $\upsilon(x)$ внешнюю нормаль к поверхности $\partial\Omega$ в точке $x\in\partial\Omega$.

Пусть $x^0=0$ и $\upsilon(x^0)=E_n$. Легко видеть, что общий случай произвольного расположения точки x^0 и произвольной ориентации вектора нормали $\upsilon(x^0)$ сводится к этому частному случаю при помощи подходящего сдвига и поворота пространства $\mathbb{R}^n$.

Из предположений $x^0=0$ и $\upsilon(x^0)=E_n$ следует существование такой функции $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, что в некоторой окрестности Ω^0 точки 0 многообразие $\mathrm{Cl}\,\Omega$ представимо в виде

$$\mathrm{Cl}\,\Omega\cap\Omega^0=\{x\in\Omega^0:x_n\le f(x')\}.$$

Зададим отображение $H:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ по правилу

$$H(x)=(x',f(x'))+\frac{x_n}{\sqrt{1+\|\nabla f(x')\|^2}}(\nabla f(x'),1).$$

Отметим, что

$$\upsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x')\|^2}}(\nabla f(x'), 1)$$

при $x \in \partial\Omega \cap \Omega^0$. Поэтому при фиксированном x' отображение H переводит прямую, проходящую через точку $(x', 0)$ пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ в направлении вектора E_n, в прямую, проходящую через точку

$$x = (x', f(x'))$$

многообразия $\partial\Omega$ в направлении вектора $\upsilon(x)$. Заметим еще, что этот перевод линеен с коэффициентом 1.

Легко видеть, что якобиан отображения H в точке $x = 0$ равен 1. Поэтому из теоремы об обратном отображении следует существование такой окрестности Ω_0 точки 0, что отображение

$$H : \Omega_0 \longrightarrow H^0(\Omega_0)$$

является диффеоморфизмом. Не умаляя общности, можно считать, что $\Omega^0 = H(\Omega_0)$ и окрестность Ω_0 является цилиндром

$$\Omega_0 = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \|x'\| < r_0, |x_n| < \varepsilon_0\}.$$

Обозначим через $F : \Omega^0 \longrightarrow \Omega_0$ диффеоморфизм обратный диффеоморфизму H. Построенное отображение F является искомым диффеоморфизмом, распрямляющим в области Ω^0 край $\partial\Omega$ многообразия $\mathrm{Cl}\,\Omega$.

Пусть теперь точка $x^0 \in \Omega$ произвольна. Обозначим через A ортогональную матрицу, у которой последний столбец совпадает с вектором $\upsilon(x^0)$, и зададим отображение $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ по правилу

$$P(x) = A^*(x - x_0).$$

Тогда $0 \in \partial P\{\Omega\}$ и вектор E_n совпадает с внешней нормалью к поверхности $\partial P\{\Omega\}$. Тогда отображения $F^0 = F \circ P^{-1}$ и $H^0 = P \circ H$, где отображения F и H построены для поверхности $\partial P\{\Omega\}$, распрямляют край $\partial\Omega$ многообразия $\mathrm{Cl}\,\Omega$ в точке $x^0 \in \partial\Omega$. Таким образом, процедура локального распрямления края многообразия $\mathrm{Cl}\,\Omega$ описана.

Многообразие $\partial\Omega$ компактно, следовательно, существует такой конечный набор точек $x^1, \ldots, x^m \in \partial\Omega$ с окрестностями $\Omega^1, \ldots, \Omega^m$ и взаимно обратными диффеоморфизмами $F^k : \Omega^k \longrightarrow \Omega_k$ и $H^k : \Omega_k \longrightarrow \Omega^k$, что при всех $k = 1, \ldots, m$ диффеоморфизм F^k распрямляет в окрестности Ω^k край $\partial\Omega$ многообразия $\mathrm{Cl}\,\Omega$ так, как это было описано выше для случая точки $x^0 \in \partial\Omega$. Отметим, что при всех $k = 1, \ldots, m$ имеют место равенства $F^k(\mathrm{Cl}\,\Omega \cap \Omega^k) = \mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n_- \cap \Omega_k$

и $F^k(\partial\Omega \cap \Omega^k) = \mathbb{R}^{n-1} \cap \Omega_k$, при этом окрестность Ω_k является цилиндром.

Пусть для единообразия $\Omega^0 = \Omega$, тогда $\operatorname{Cl}\Omega \subset \Omega^0 \cup \Omega^1 \cup \cdots \cup \Omega^m$. Обозначим через $A^0, A^1, \ldots, A^m$ разбиение единицы, подчиненное системе окрестностей $\Omega^0, \Omega^1, \ldots, \Omega^m$, а именно, $A^k \in C_0^\infty(\Omega^k)$ при всех $k = 0, 1, \ldots, m$ и $A^0(x) + A^1(x) + \cdots + A^m(x) = 1$ при всех x из некоторой окрестности множества $\operatorname{Cl}\Omega$. Не умаляя общности, можно считать, что в некоторой окрестности многообразия $\partial\Omega$ функции $A^1, \ldots, A^m$ постоянны на прямых, проходящих через точки $x \in \partial\Omega$ в направлении нормали $\upsilon(x)$. Именно функции $A^1, \ldots, A^m$ можно выбрать так, что при некотором $\varepsilon > 0$ для любой точки $x \in \partial\Omega$ имеет место равенство

$$A^k(x + t\upsilon(x)) = A^k(x)$$

при всех $|t| \leq \varepsilon$.

Пусть $S(\Omega) = \rho_\Omega\{S(\mathbb{R}^n)\}$.

Т е о р е м а 9.10. *Подпространство* $\mathcal{S}(\Omega) = \rho_\Omega\{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$ *плотно в пространстве* $W_2^l(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in W_2^l(\Omega)$. Легко видеть, что имеет место включение $A^0 u \in \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega)$. Поэтому в пространстве $C_0^\infty(\Omega)$ существует такая последовательность $\psi_1^0, \psi_2^0, \ldots$, что

$$A^0 u = \lim_{k\to\infty} \psi_k^0$$

в пространстве $W_2^l(\Omega)$. Пусть $1 \leq i \leq m$, тогда $A^i u \in W_2^l(\Omega \cap \Omega^i)$. Поэтому из теоремы 8.10 следует, что $(A^i u) \circ H^i \in W_2^l(\mathbb{R}^n_- \cap \Omega_i)$. Заметим, что

$$\operatorname{supp}[(A^i u) \circ H^i] \subset \operatorname{supp}(A^i \circ H^i),$$

поэтому функцию $(A^i u) \circ H^i$ можно доопределить нулем вне множества $\mathbb{R}^n_- \cap \Omega_i$ до функции из пространства $W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$. Из теоремы 2.10 следует существование в пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такой последовательности $\varphi_1^i, \varphi_2^i, \ldots$, что

$$(A^i u) \circ H^i = \lim_{k\to\infty} \varphi_k^i$$

в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$. При этом из доказательства этой теоремы вытекает, что можно считать выполненным включение $\operatorname{supp}\varphi_k^i \subset \Omega_i$. Это включение говорит о том, что последний предел имеет место в пространстве $W_2^l(\mathbb{R}^n_- \cap \Omega_i)$. Из теоремы 8.10 следует, что

$$A^i u = \lim_{k\to\infty} \varphi_k^i \circ F^i$$

в $W_2^l(\Omega \cap \Omega^i)$. Зададим $\psi_k^i = \varphi_k^i \circ F^i$, тогда

$$u = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{m} \psi_k^i$$

в пространстве $W_2^l(\Omega)$. ■

Т е о р е м а 10.10. *Существует линейный непрерывный оператор*

$$\tau_\Omega^l : W_2^l(\Omega) \longrightarrow W_2^l(\Omega)$$

такой, что сквозное отображение

$$W_2^l(\Omega) \xrightarrow{\tau_\Omega} W_2^l(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\rho_\Omega} W_2^l(\Omega)$$

совпадает с тождественным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем, как и в доказательстве теоремы 9.10, считать, что при $1 \le i \le m$ функция $(A^i u) \circ H^i$, где $u \in W_2^l(\Omega)$, доопределена нулем в полупространстве $\mathbb{R}^n_-$ до функции из пространства $W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$. Тогда оператор τ_Ω может быть определен по правилу

$$\tau_\Omega u = \lambda_{\Omega^i}\{A^0 u\} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{\Omega^i}\{(\tau_{\mathbb{R}^n_-}[(A^i u) \circ H^i])|_{\Omega_i} \circ F^i\},$$

где оператор $\tau_{\mathbb{R}^n_-}$ определен в доказательстве теоремы 3.10. ■

Приступая к обобщению теоремы 4.10, дадим определение пространства Соболева $W_2^s(\mathcal{M})$ для бесконечно дифференцируемого замкнутого многообразия $\mathcal{M}$ размерности n.

Пусть на многообразии $\mathcal{M}$ задан атлас, образованный из координатных окрестностей ω^i и координатных отображений $f^i : \omega^i \longrightarrow \omega_i$, где $\omega_i \subset \mathbb{R}^n$, а $i = 1, \ldots, m$. Обозначим через $h^i : \omega_i \longrightarrow \omega^i$ отображения, обратные координатным.

Пусть $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ – разбиение единицы, подчиненное системе окрестностей $\omega^1, \ldots, \omega^m$, а именно $\alpha^i \in C_0^\infty(\omega_i)$ при всех $i = 1, \ldots, m$ и $\alpha^1(x) + \cdots + \alpha^m(x) = 1$ при всех $x \in \mathcal{M}$.

Пространство Соболева $W_2^s(\mathcal{M})$ образовано из таких функций u, заданных на многообразии $\mathcal{M}$, что

$$\lambda_{\omega_i}[(\alpha^i u) \circ h^i] \in W_2^s(\mathbb{R}^n)$$

при всех $i = 1, \ldots, m$. Пространство $W_2^s(\mathcal{M})$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^s(\mathcal{M})} = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_{\omega_i}[(\alpha^i u) \circ h^i], \lambda_{\omega_i}[(\alpha^i v) \circ h^i])_{W_2^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Естественно, что введенная гильбертова структура зависит от выбора атласа на многообразии $\mathcal{M}$. Однако двум различным атласам соответствуют две эквивалентные гильбертовы структуры.

Пусть атлас $(\tilde{\omega}^i, \tilde{f}^i)$, где $i = 1, \ldots, m$, эквивалентен атласу (ω^i, f^i), где $i = 1, \ldots, m$. Предположим, что пространство $W_2^s(\mathcal{M})$ определено с помощью системы $(\omega^i, f^i, \alpha^i)$, а пространство $\tilde{W}_2^s(\mathcal{M})$ определено с помощью системы $(\tilde{\omega}^i, \tilde{f}^i, \tilde{\alpha}^i)$. Возьмем $u \in W_2^s(\mathcal{M})$. Несложно проверить, что

$$\lambda_{\tilde{\omega}_j}[(\tilde{\alpha}^j u) \circ \tilde{h}^j] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{\tilde{\omega}^j} \left(\{ \lambda_{\omega_i}[(\beta^i \tilde{\alpha}^j) \circ h^i] \lambda_{\omega_i}[(\alpha^i u) \circ h^i] \} \circ (f^i \circ h^j) \right),$$

где функция $\beta^i \in C_0^\infty(\omega^i)$ равна 1 на $\operatorname{supp} \alpha^i$. Поэтому из теоремы 8.10 следует включение $\lambda_{\tilde{\omega}_j}[(\tilde{\alpha}_j u) \circ \tilde{h}^j] \in W_2^s(\mathbb{R}^n)$. Это говорит о том, что $u \in \tilde{W}_2^s(\mathcal{M})$. Аналогичным образом из включения $u \in \tilde{W}_2^s(\mathcal{M})$ следует включение $u \in W_2^s(\mathcal{M})$. Поэтому $W_2^s(\mathcal{M}) = \tilde{W}_2^s(\mathcal{M})$. Записанное выше тождество позволяет получить неравенство

$$\|\lambda_{\tilde{\omega}_j}[(\tilde{\alpha}^j u) \circ \tilde{h}^j]\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)} \le C \sum_{i=1}^{m} \|\lambda_{\omega_i}[(\alpha^i u) \circ h^i]\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)},$$

поэтому нормы в пространствах $W_2^s(\mathcal{M})$ и $\tilde{W}_2^s(\mathcal{M})$ эквивалентны.

В рассматриваемом нами случае многообразием $\mathcal{M}$ всегда будет служить $\partial\Omega$. При этом ω^i, f^i и α^i определяются по правилам

$$\omega^i = \partial\Omega \cap \Omega^i, \quad f^i = F^i|_{\omega^i} \quad \text{и} \quad \alpha^i = A^i|_{\omega^i},$$

где $i = 1, \ldots, m$.

Зададим линейный оператор

$$\gamma_\Omega^k : \mathcal{S}(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\partial\Omega)$$

по правилу

$$\gamma_\Omega^k(\varphi)(x) = \left. \frac{d^k \psi(x + t\upsilon(x))}{dt^k} \right|_{t=0},$$

где $x \in \partial\Omega$, а $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ – такая функция, что $\varphi = \rho_\Omega \psi$. Очевидно, что определение оператора γ_Ω^k корректно – функция $\gamma_\Omega^k(\varphi)$ не зависит от выбора функции ψ.

Т е о р е м а 11.10. *При всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$ линейный оператор*

$$\gamma_\Omega^k : \mathcal{S}(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\partial\Omega)$$

единственным образом продолжается до линейного непрерывного оператора

$$\gamma_\Omega^k : W_2^l(\Omega) \longrightarrow W_2^{l-k-1/2}(\partial\Omega),$$

при этом для линейного непрерывного оператора

$$\gamma_\Omega^0 \times \gamma_\Omega^1 \times \cdots \times \gamma_\Omega^{l-1} : W_2^l(\Omega) \longrightarrow \prod_{k=0}^{l-1} W_2^{l-k-1/2}(\partial\Omega)$$

существует такой линейный непрерывный оператор

$$\varkappa_\Omega : \prod_{k=0}^{l-1} W_2^{l-k-1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow W_2^l(\Omega),$$

что сквозное отображение

$$\prod_{k=0}^{l-1} W_2^{l-k-1/2}(\partial\Omega) \xrightarrow{\varkappa_\Omega} W_2^l(\Omega) \xrightarrow{\gamma_\Omega^0 \times \gamma_\Omega^1 \times \cdots \times \gamma_\Omega^{l-1}} \prod_{k=0}^{l-1} W_2^{l-k-1/2}(\partial\Omega)$$

совпадает с тождественным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$ и $0 \le k \le l-1$. Тогда

$$\gamma_\Omega^k(\varphi)(x) = \left.\frac{d^k(\tau_\Omega\varphi)[x+tv(x)]}{dt^k}\right|_{t=0},$$

где $x \in \partial\Omega$, а линейный оператор τ_Ω определен в теореме 10.10. Зададим $\psi = \tau_\Omega\varphi$. Тогда

$$\lambda_{\omega_i}\{[\alpha^i\gamma_\Omega^k(\varphi)] \circ h^i\} = \lambda_{\omega_i}\left\{\left(\alpha^i \left.\frac{d^k\psi[\cdot + tv(\cdot)]}{dt^k}\right|_{t=0}\right) \circ h^i\right\} =$$

$$\lambda_{\omega_i}\left\{\left(\left.\frac{d^k(A^i\psi)[\cdot + tv(\cdot)]}{dt^k}\right|_{t=0}\right) \circ h^i\right\} = \lambda_{\omega_i}\left\{\left.\frac{d^k}{dx_n^k}[(A^i\psi) \circ H^i]\right|_{x_n=0}\right\} =$$

$$\gamma^k\{\lambda_{\Omega_i}[(A^i\psi) \circ H^i]\}$$

и поэтому

$$\|\lambda_{\omega_i}\{[\alpha^i\gamma_\Omega^k(\varphi)] \circ h^i\}\|_{W_2^{l-k-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C\|(A^i\psi) \circ H^i\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)} =$$

$$C\|(A^i\psi) \circ H^i\|_{W_2^l(\Omega_i)} \le C\|A^i\psi\|_{W_2^l(\Omega_i)} \le C\|\psi\|_{W_2^l(\Omega_i)} \le$$

$$C\|\tau_\Omega\varphi\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)} \le C\|\varphi\|_{W_2^l(\Omega)}.$$

Отсюда следует существование такого C, что

$$\|\gamma_\Omega^k\varphi\|_{W_2^{l-k-1/2}(\partial\Omega)} \le C\|\varphi\|_{W_2^l(\Omega)}$$

при всех $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$. Тогда из теоремы 9.10 следует, что линейный оператор

$$\gamma_\Omega^k : \mathcal{S}(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\partial\Omega)$$

действительно может быть продолжен до линейного непрерывного оператора

$$\gamma_\Omega^k : W_2^l(\Omega) \longrightarrow W_2^{l-k-1/2}(\partial\Omega).$$

Линейный непрерывный оператор $\varkappa_\Omega$, удовлетворяющий перечисленным в условии теоремы свойствам, может быть определен по правилу

$$\varkappa_\Omega(u_0, .., u_l{-}_1) =$$

$$\sum_{i=1}^m \rho_\Omega \lambda_{\Omega^i}\{A^i(\varkappa\{\lambda_{\omega_i}[(\alpha^i u_0)\circ h^i], \ldots, \lambda_{\omega_i}[(\alpha^i u_{l-1})\circ h^i]\}\circ F^i)\},$$

где $u_k \in W_2^{l-k-1/2}(\partial\Omega)$, $k = 0, \ldots, l-1$. ■

Т е о р е м а 12.10. *Включение $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ имеет место тогда и только тогда, когда $u \in W_2^l(\Omega)$ и $\gamma_\Omega^k u = 0$ при всех $k = 0, \ldots, l-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Возьмем в пространстве $C_0^\infty(\Omega)$ такую последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ что

$$u = \lim_{p\to\infty} \varphi_p$$

в $W_2^l(\Omega)$. Тогда из теоремы 11.10 следует, что

$$\gamma_\Omega^k u = \lim_{p\to\infty} \gamma_\Omega^k \varphi_p$$

в $W_2^{l-k-1/2}(\partial\Omega)$ при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$. Так как имеет место равенство $\gamma_\Omega^k \varphi_p = 0$, то $\gamma_\Omega^k u = 0$ при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$.

Достаточность. Пусть $u \in W_2^l(\Omega)$ и $\gamma_\Omega^k u = 0$ при $k = 0, \ldots, l-1$. Докажем, что $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$ и $\psi = \tau_\Omega\varphi$. Тогда при $1 \le i \le m$ и $x \in \partial\Omega \cap \Omega^i$ имеем

$$\alpha^i(x)\gamma_\Omega^k\varphi(x) = \alpha^i(x)\left.\frac{d^k\psi(x+t\upsilon(x))}{dt^k}\right|_{t=0} =$$

$$\left.\frac{d^k(A^i\psi)(x+t\upsilon(x))}{dt^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^k(A^i\psi)[H^i(f^i(x)+tE_n)]}{dt^k}\right|_{t=0} =$$

$$\left.\frac{d^k[(A^i\psi)\circ H^i](f^i(x)+tE_n)}{dt^k}\right|_{t=0}=\frac{d^k}{dx_n^k}[(A^i\psi)\circ H^i](f^i(x)),$$

следовательно,

$$\lambda_{\omega_i}\{(\alpha^i\gamma_\Omega^k\varphi)\circ h^i\}=\gamma^k\{\lambda_{\Omega_i}[(A^i\tau_\Omega\varphi)\circ H^i]\}.$$

Возьмем в $\mathcal{S}(\Omega)$ такую последовательность функций $\varphi_1,\varphi_2,\ldots$, что

$$u=\lim_{p\to\infty}\varphi_p$$

в $W_2^l(\Omega)$. Тогда из теорем 10.10 и 11.10 следует, что

$$\lambda_{\omega_i}\{(\alpha^i\gamma_\Omega^k u)\circ h^i\}=\gamma^k\{\lambda_{\Omega_i}[(A^i\tau_\Omega u)\circ H^i]\}.$$

По предположению $\gamma_\Omega^k u=0$ при всех $k=0,1,\ldots,l-1$, поэтому

$$\gamma^k\{\lambda_{\Omega_i}[(A^i\tau_\Omega u)\circ H^i]\}=0$$

при всех $k=0,1,\ldots,l-1$. Будем считать, что функция $(A^iu)\circ H^i$ продолжена нулем вне множества $\mathbb{R}^n_-\cap\Omega_i$ до функции из пространства $W_2^l(\mathbb{R}^n_-)$. Тогда

$$\gamma^k_{\mathbb{R}^n_-}\{(A^iu)\circ H^i\}=0$$

при всех $k=0,1,\ldots,l-1$. Поэтому из теоремы 6.10 следует, что

$$(A^iu)\circ H^i\in\overset{\circ}{W}{}_2^l(\mathbb{R}^n_-).$$

Более того, $(A^iu)\circ H^i\in\overset{\circ}{W}{}_2^l(\mathbb{R}^n_-\cap\Omega_i)$, следовательно, $A^iu\in\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega\cap\Omega^i)\subset\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Вместе с тем $u=A^0u+\sum_{i=1}^m A^iu$, поэтому $u\in\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. ■

Замечание. Аналогичным образом доказывается следующее утверждение, обобщающее теорему 5.10. Пусть функция $u\in W_2^l(\Omega)$ удовлетворяет равенству $\gamma_\Omega^k u=0$ при всех $k=0,\ldots,l-1$, тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такая функция $w\in C_0^\infty(\Omega)$, что

$$\|u-wu\|_{W_2^l(\Omega)}\le\varepsilon.$$

Аналогичное утверждение для произвольного открытого множества Ω доказано в работах [28,29].

Зададимся линейным дифференциальным оператором

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \le l} a_\alpha \partial^\alpha$$

порядка l с постоянными вещественными коэффициентами. Сопряженный дифференциальный оператор будем обозначать

$$\check{\mathcal{L}} = \sum_{|\alpha| \le l} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha.$$

С дифференциальным оператором $\mathcal{L}$ свяжем многочлен

$$\mathcal{L}(\xi) = \sum_{|\alpha| \le l} a_\alpha \xi^\alpha,$$

который удобно записать в виде

$$\mathcal{L}(\xi) = \mathcal{L}_l(\xi) + \mathcal{L}_{l-1}(\xi) + \cdots + \mathcal{L}_0(\xi),$$

где $\mathcal{L}_k(\xi)$ – однородный многочлен степени k.

Дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ называется эллиптическим, если $\mathcal{L}_l(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$.

Поскольку коэффициенты дифференциального оператора $\mathcal{L}$ предполагаются вещественными, в случае $n \ge 2$ дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ может быть эллиптическим только при четных порядках l.

Распределение $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее равенству $\mathcal{L}E = \delta_0$, называется фундаментальным решением дифференциального оператора $\mathcal{L}$. Зададим $\check{E}(x) = E(-x)$. Легко видеть, что $\check{\mathcal{L}}\check{E} = \delta_0$, поэтому $\check{E}$ – фундаментальное решение дифференциального оператора $\check{\mathcal{L}}$.

Т е о р е м а 1.11. *Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ имеет фундаментальное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Докажем, что линейный оператор

$$\mathcal{L} : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.11}$$

является мономорфизмом.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{L}\varphi_1 = \mathcal{L}\varphi_2$, тогда

$$\mathcal{L}(-i\xi)\mathcal{F}\varphi_1 = \mathcal{L}(-i\xi)\mathcal{F}\varphi_2.$$

Обе функции $\mathcal{F}\varphi_1$ и $\mathcal{F}\varphi_2$ являются целыми, поэтому $\mathcal{F}\varphi_1 = \mathcal{F}\varphi_2$, откуда $\varphi_1 = \varphi_2$.

Из мономорфности оператора (1.11) следует, что на его образе $\mathcal{L}\{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ корректно определен функционал

$$u : \mathcal{L}\{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\} \longrightarrow \mathbb{C} \tag{2.11}$$

по следующему правилу:

$$u : \psi \longrightarrow \varphi(0),$$

где φ – та единственная функция из пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, при которой $\psi = \mathcal{L}\varphi$.

2) Ниже будет доказано, что функционал (2.11) можно продолжить на все пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ до распределения

$$u : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}. \tag{3.11}$$

В таком случае распределение $E = \check{u}$ является искомым фундаментальным решением. Действительно,

$$(\mathcal{L}E, \varphi) = (E, \check{\mathcal{L}}\varphi) = (u, (\check{\mathcal{L}}\varphi)\check{}) = (u, \mathcal{L}\check{\varphi}) = \check{\varphi}(0) = (\delta_0, \varphi)$$

при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, поэтому $\mathcal{L}E = \delta_0$.

3) Пусть $y \in \mathbb{R}^n$. Условимся через $\mathbf{e}^{iy}$ обозначать вектор

$$(e^{iy_1}, e^{iy_2}, \ldots, e^{iy_n}).$$

Обозначим n-мерный куб со стороной $I = [-\pi, \pi]$ через I^n.

Докажем, что для произвольного многочлена $\mathcal{P}$ степени l существует такая постоянная A, что для любой целой функции f и любого $\xi \in \mathbb{C}^n$ справедлива оценка

$$|f(\xi)| \le A \int\limits_{I^n} |(f\mathcal{P})(\xi + \mathbf{e}^{iy})| dy, \tag{4.11}$$

при этом постоянная A может быть взята в виде

$$\frac{1}{A} = \int\limits_{I^n} |\mathcal{P}_l(\mathbf{e}^{iy})| dy.$$

Фиксируем $\xi \in \mathbb{C}^n$ и $y \in I^n$. Зададим

$$F(z) = f(\xi + z\mathbf{e}^{iy}), \quad Q(z) = \mathcal{P}(\xi + z\mathbf{e}^{iy}),$$

где $z \in \mathbb{C}$. Тогда

$$Q(z) = A \prod_{k=1}^{l} (z + a_k),$$

где $A = \mathcal{P}_l(\mathbf{e}^{iy})$. Положим $Q_0(z) = A\prod_{k=1}^{l}(1 + a_k z)$. Тогда $AF(0) = (FQ_0)(0)$. Так как $Q(z) = Q_0(z)$ при $|z| = 1$, то

$$|AF(0)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |(FQ)(e^{it})|dt.$$

Отсюда следует, что

$$|\mathcal{P}_l(\mathbf{e}^{iy})||f(\xi)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |(f\mathcal{P})(\xi + e^{it}\mathbf{e}^{iy})|dt,$$

поэтому

$$|f(\xi)| \le A\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{I^n} |(f\mathcal{P})(\xi + e^{it}\mathbf{e}^{iy})|dydt =$$

$$A\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{I^n} |(f\mathcal{P})(\xi + \mathbf{e}^{iy})|dydt = A\int\limits_{I^n} |(f\mathcal{P})(\xi + \mathbf{e}^{iy})|dy.$$

Неравенство (4.11) доказано.

4) Определим

$$\|\psi\| = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{I^n} |(\mathcal{F}\psi)(\xi + \mathbf{e}^{iy})|d\xi dy.$$

Докажем, что из равенства нулю предела

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k = 0 \tag{5.11}$$

в пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|\psi_k\| = 0. \tag{6.11}$$

Положим

$$hy(x) = \exp(-(x, \mathbf{e}^{iy})),$$

тогда

$$(\mathcal{F}\psi)(\xi + \mathbf{e}^{iy}) = [\mathcal{F}(h_y\psi)](\xi),$$

поэтому

$$\|\psi\| = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{I^n} |[\mathcal{F}(h_y\psi)](\xi)|d\xi dy.$$

Пусть имеет место предел (5.11). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k_0 > 0$, что

$$\|(1-\Delta)^n (h_y \psi_k)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon^2$$

при всех $k \ge k_0$ и $y \in I^n$. Из равенства Парсеваля следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+\|\xi\|^2)^n |(\mathcal{F}\psi_k)(\xi + \mathbf{e}^{iy})|^2 d\xi \le \varepsilon^2$$

при всех $k \ge k_0$ и $y \in I^n$. Используя неравенство Шварца, получаем

$$\|\psi_k\| = \int\limits_{I^n} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+\|\xi\|^2)^{-n} (1+\|\xi\|^2)^n |(\mathcal{F}\psi_k)(\xi+\mathbf{e}^{iy})| d\xi \right\} dy \le$$

$$(2\pi)^n \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+\|\xi\|^2)^{-2n} d\xi \right\}^{1/2} \varepsilon$$

при всех $k \ge k_0$. Отсюда следует (6.11).

5) Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\psi = \mathcal{L}\varphi$. Тогда $\mathcal{F}\psi = \mathcal{L}(-i\xi)\mathcal{F}\varphi$, функции $\mathcal{F}\psi$ и $\mathcal{F}\varphi$ суть целые, поэтому при $\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{L}(-i\xi)$ из неравенства (4.11) вытекает, что

$$|(\mathcal{F}\varphi)(\xi)| \le A \int\limits_{I^n} |(\mathcal{F}\psi)(\xi + \mathbf{e}^{iy})| d\xi.$$

Используя равенство

$$\varphi(0) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\varphi(\xi) d\xi,$$

получаем

$$|\varphi(0)| \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{I^n} |\mathcal{F}\psi(\xi + \mathbf{e}^{iy})| d\xi dy$$

с некоторой новой константой C, т.е.

$$|\varphi(0)| \le C\|\psi\|.$$

Согласно определению (2.11) имеем

$$|(u,\psi)| \le C\|\psi\| \qquad (7.11)$$

при всех $\psi \in \mathcal{L}\{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$. Из теоремы Хана–Банаха следует, что функционал (2.11) может быть продолжен до функционала (3.11) с сохранением неравенства (7.11). Из п. 4) вытекает, что функционал непрерывен на пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Пусть $\mathcal{L}$ – эллиптический дифференциальный оператор.

Т е о р е м а 2.11. *Если* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in H_2^s(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$ *и* $\mathcal{L}u = v$, *то* $u \in H_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – такие пробные функции, что функция ψ равна 1 в некоторой окрестности $\operatorname{supp}\varphi$. Докажем, что из включения $\psi u \in H_2^t(\mathbb{R}^n)$, где $t \le l + s - 1$, следует включение $\varphi u \in H_2^{t+1}(\mathbb{R}^n)$.

Установим вначале, что $\mathcal{L}(\varphi u) \in H_2^{t-l+1}(\mathbb{R}^n)$. Действительно, из формулы Лейбница следует

$$\mathcal{L}(\varphi u) - \varphi\mathcal{L}u = \mathcal{L}[\varphi(\psi u)] - \varphi\mathcal{L}(\psi u) \in H_2^{t-l+1}(\mathbb{R}^n).$$

Согласно теореме 6.9 имеем $\varphi v \in H_2^s(\mathbb{R}^n)$, поэтому из равенства

$$\mathcal{L}(\varphi u) - \varphi\mathcal{L}u = \mathcal{L}(\varphi u) - \varphi v$$

и неравенства $t - l + 1 \le s$ следует, что $\mathcal{L}(\varphi u) \in H_2^{t-l+1}(\mathbb{R}^n)$.

Зададим

$$q(\xi) = \|\xi\|^{-l}\mathcal{L}_l(-i\xi),$$
$$r(\xi) = (1 + \|\xi\|^l)q(\xi),$$

где $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$, и определим операторы

$$Q : H_2^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_2^s(\mathbb{R}^n),$$
$$R : H_2^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_2^{s-l}(\mathbb{R}^n),$$
$$S : H_2^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H_2^{s-l+1}(\mathbb{R}^n)$$

по правилам

$$Q(w) = \mathcal{F}^{-1}[q\mathcal{F}w],$$
$$R(w) = \mathcal{F}^{-1}[r\mathcal{F}w],$$
$$S = \psi(\mathcal{L} - \mathcal{L}_l).$$

Легко видеть, что операторы Q и R непрерывны и обратимы. Из равенства

$$\mathcal{L}_l(-i\xi) = r(\xi) - q(\xi)$$

получаем, что

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}_l w) = \mathcal{L}_l(-i\xi)\mathcal{F}w = (r(\xi) - q(\xi))\mathcal{F}w = \mathcal{F}(Rw - Qw).$$

Поэтому $R(\varphi u) = (Q - S)(\varphi u) + \mathcal{L}(\varphi u)$.

Из $\psi u \in H_2^t(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi\psi = \varphi$ следует $\varphi u = \varphi\psi u \in H_2^t(\mathbb{R}^n)$, поэтому

$$(Q - S)(\varphi u) \in H_2^{t-l+1}(\mathbb{R}^n).$$

Ранее было доказано включение $\mathcal{L}(\varphi u) \in H_2^{t-l+1}(\mathbb{R}^n)$, из которого вытекает, что $R(\varphi u) \in H_2^{t-l+1}(\mathbb{R}^n)$. Так как оператор R^{-1} переводит пространство $H_2^{t-l+1}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $H_2^{t+1}(\mathbb{R}^n)$, то $\varphi u \in H_2^{t+1}(\mathbb{R}^n)$.

2) Докажем теперь включение $u \in H_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^n$. Требуется доказать, что $u|_\omega \in H_2^{l+s}(\omega)$. Для этого достаточно установить существование такой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, что φ равна 1 в некоторой окрестности множества $\mathrm{Cl}\,\omega$ и имеет место включение $\varphi u \in H_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть пробная функция $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ равна 1 в некоторой окрестности множества $\mathrm{Cl}\,\omega$. Распределение $\varphi \circ u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, поэтому имеет место $\varphi \circ u \in H_2^t(\mathbb{R}^n)$ при некотором $t = s + l - k$, где k – натуральное число. Если $k = 0$, то утверждение теоремы доказано. Пусть $k \geq 1$. Построим такие пробные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, что функция φ_{i-1} равна 1 в некоторой окрестности носителя $\mathrm{supp}\,\varphi_i$. При этом функция φ_k равна 1 в некоторой окрестности множества $\mathrm{Cl}\,\omega$. Из п. 1) имеем

$$\varphi_1 u \in H_2^{t+1}(\mathbb{R}^n), \ldots, \varphi_k u \in H_2^{t+k}(\mathbb{R}^n),$$

поэтому $\varphi u \in H_2^{l+s}(\mathbb{R}^n)$ при $\varphi = \varphi_k$. ■

Непосредственными следствиями доказанной теоремы являются следующие два утверждения.

Т е о р е м а 3.11. *Пусть $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{L}u = v$. Тогда из включения $v|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$ следует включение $u|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда $\varphi v|_\Omega \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому $v|_\Omega \in H_2^s(\Omega)^{\mathrm{loc}}$ при $s \in \mathbb{R}$. Так как $\mathcal{L}(u|_\Omega) = v|_\Omega$, то из теоремы 2.11 получаем, что $u|_\Omega \in H_2^{l+s}(\Omega)^{\mathrm{loc}}$ при $s \in \mathbb{R}$. Теперь из теоремы 2.9 следует, что $u|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$. ■

Т е о р е м а 4.11. *Пусть E – фундаментальное решение эллиптического дифференциального оператора $\mathcal{L}$. Тогда $E \in H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}} (s > 0)$ и $E|_{\mathbb{R}^n \setminus 0} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathcal{F}\delta_0 = (2\pi)^{-n/2}$, из неравенства

$$\int (1 + \|\xi\|^2)^{-n/2-s} d\xi < \infty$$

следует включение $\delta_0 \in H_2^{-n/2-s}(\mathbb{R}^n)$. По определению $\mathcal{L}E = \delta_0$, поэтому из теоремы 2.11 следует включение $E \in H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$. Включение $E|_{\mathbb{R}^n \setminus 0} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ вытекает из равенства $\delta_0|_{\mathbb{R}^n \setminus 0} = 0$ и теоремы 3.11. ■

С л е д с т в и е. *Пусть* $l > n/2$, *тогда* $E \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Действительно, пусть $0 < s < l - n/2$, тогда

$$E \in H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}} \subset H_2^0(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}.$$

Остается заметить, что $H_2^0(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}} = L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}}$.

§12. Задача Дирихле для оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$

Напомним, что через

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \le l} a_\alpha \partial^\alpha$$

был обозначен эллиптический дифференциальный оператор порядка l с постоянными вещественными коэффициентами, а через

$$\check{\mathcal{L}} = \sum_{|\alpha| \le l} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha$$

– сопряженный дифференциальный оператор. Будем дополнительно предполагать, что выполнено неравенство $l > n/2$.

Пусть $E \in \mathcal{D}'(\Omega)$ – фундаментальное решение дифференциального оператора $\mathcal{L}$, а $\check{E}(x) = E(-x)$ – фундаментальное решение сопряженного дифференциального оператора $\check{\mathcal{L}}$. Поскольку дифференциальные операторы $\mathcal{L}$ и $\check{\mathcal{L}}$ имеют вещественные коэффициенты, их фундаментальные решения E и $\check{E}$ можно считать вещественными. Напомним, что из предположения $l > n/2$ следует, что $E, \check{E} \in L_2(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное открытое множество. Зададим

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \mathcal{L}u = 0\}.$$

В пространстве $L_2(\Omega)$ множество $P_{\mathcal{L}}(\Omega)$ является замкнутым подпространством. Как обычно, его ортогональное дополнение обозначается через $P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp$. Условимся считать, что функции из пространств $L_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ продолжены нулем вне множества Ω.

Т е о р е м а 1.12. *Отображение*

$$\check{E}* : L_2(\Omega) \longrightarrow W_2^l(\Omega), \tag{1.12}$$

определенное по правилу

$$\check{E}* : u \mapsto (\check{E} * u)|_\Omega,$$

является линейным непрерывным оператором.

Доказательство. Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Так как $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, то из теоремы 2.11 следует, что $\check{E} * u \in H_2^l(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$. Поэтому имеет место включение $(\check{E} * u)|_\Omega \in W_2^l(\Omega)$.

Докажем непрерывность оператора (1.12). Пусть пробная функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ равна единице в некоторой окрестности Ω_0 множества $\mathrm{Cl}\,\Omega$. Для доказательства непрерывности оператора (1.12) достаточно проверить, что отображение $u \mapsto \varphi(\check{E} * u)$ является линейным непрерывным оператором из пространства $L_2(\Omega)$ в пространство $W_2^l(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Зададим оператор

$$A : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$$

по правилу

$$(Au)(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \Omega_0, \\ \check{\mathcal{L}}[\varphi(x)(\check{E} * u)(x)] & \text{при } x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega_0. \end{cases}$$

Так как

$$(\check{E} * u)(x) = \int\limits_\Omega E(y-x)u(y)dy,$$

то линейный оператор A непрерывен. Очевидно, что

$$\check{\mathcal{L}}(\varphi(\check{E} * u)) = u + Au$$

при всех $u \in L_2(\Omega)$, поэтому

$$\check{\mathcal{L}}(-i\xi)\mathcal{F}(\varphi(\check{E} * u)) = \mathcal{F}u + \mathcal{F}(Au).$$

Из неравенства (4.11) следует, что

$$|\mathcal{F}(\varphi(\check{E} * u))(\xi)| \le C \int\limits_{I^n} |\mathcal{F}u(\xi + \mathbf{e}^{iy})|dy + C \int\limits_{I^n} |\mathcal{F}(Au)(\xi + \mathbf{e}^{iy})|d\xi$$

при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Далее, используя неравенство Шварца, имеем

$$|\mathcal{F}u(\xi + \mathbf{e}^{iy})| = |(2\pi)^{-n/2} \int\limits_\Omega \exp(-i(x, \xi + \mathbf{e}^{iy}))u(x)dx| \le$$
$$(2\pi)^{-n/2} \| \exp(\cdot, \operatorname{Im} e^{iy}) \|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Аналогично

$$|\mathcal{F}(Au)(\xi+\mathbf{e}^{iy})| \le (2\pi)^{-n/2}\|\exp(\cdot,\operatorname{Im}\mathbf{e}^{iy})\|_{L_2(\Omega)}\|Au\|_{L_2(\Omega)},$$

поэтому

$$|\mathcal{F}(\varphi(\check{E}*u))(\xi)| \le C\|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Зададимся таким $r>0$, что при всех $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash r\mathbb{D}^n$ имеет место неравенство

$$(1+\|\xi\|^2)^l|\check{\mathcal{L}}(-i\xi)|^{-2} \le C.$$

Тогда

$$\|\varphi(\check{E}*u)\|^2_{H_2^l(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{I^n}|\mathcal{F}(\varphi(\check{E}*u))(\xi)|^2(1+\|\xi\|^2)^l d\xi =$$

$$\int\limits_{I^n\backslash r\mathbb{D}^n}|\check{\mathcal{L}}(-i\xi)\mathcal{F}(\varphi(\check{E}*u))(\xi)|^2(1+\|\xi\|^2)^l|\check{\mathcal{L}}(-i\xi)|^{-2}d\xi+$$

$$\int\limits_{r\mathbb{D}^n}|\mathcal{F}(\varphi(\check{E}*u))(\xi)|^2(1+\|\xi\|^2)^l d\xi \le$$

$$C\|\mathcal{F}u+\mathcal{F}(Au)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}+C\|\mathcal{F}(\varphi(\check{E}*u))\|^2_{C^0(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|^2_{\mathcal{L}_2(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\|\varphi(\check{E}*u)\|_{W_2^l(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Непрерывность оператора (1.12) доказана. ■

Т е о р е м а 2.12. *Отображения*

$$\check{E}*: P_{\mathcal{L}(\Omega)^\perp} \longrightarrow \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega),$$
$$\check{\mathcal{L}}: \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega) \longrightarrow P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp$$

являются взаимно обратными непрерывными изоморфизмами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $u\in P_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Докажем, что $\check{E}*u\in \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega)$. Построим такие открытые множества $\omega_1\subset\omega_2\subset\ldots$, что

$$\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\omega_k.$$

Докажем, что

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp = \mathrm{Cl}\bigcup_{k=1}^{\infty}P_{\mathcal{L}}(\omega_k)^\perp, \tag{2.12}$$

где Cl означает замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$.

Включение

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp} \supset \mathrm{Cl} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{\mathcal{L}}(\omega_k)^{\perp}$$

очевидно. Докажем включение

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega) \supset (\mathrm{Cl} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{\mathcal{L}}(\omega_k)^{\perp})^{\perp}.$$

Пусть

$$w \in (\mathrm{Cl} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{\mathcal{L}}(\omega_k)^{\perp})^{\perp}.$$

Тогда $(w, v)_{L_2(\Omega)} = 0$ при $v \in P_{\mathcal{L}}(\omega_k)^{\perp}$, поэтому $w|_{\omega_k} \in P_{\mathcal{L}}(\omega_k)$ при всех $k = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что $w \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Равенство (2.12) доказано.

Из равенства (2.12) вытекает существование такой последовательности функций $u_k \in P_{\mathcal{L}}(\omega_k)^{\perp}$, где $k = 1, 2, \ldots$, что

$$u = \lim_{k \to \infty} u_k$$

в $L_2(\Omega)$. Из теоремы 1.12 следует, что

$$(\check{E} * u)|_{\Omega} = \lim_{k \to \infty} (\check{E} * u_k)|_{\Omega}$$

в $W_2^l(\Omega)$. Однако $(\check{E} * u_k)(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \backslash \omega_k$. Поэтому $\check{E} * u_k \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и, следовательно, $\check{E} * u \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$.

Непрерывность оператора

$$\check{E} * : P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp} \longrightarrow \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$$

следует из теоремы 1.12.

2) Пусть $U \subset \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Докажем, что $\check{\mathcal{L}}U \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}$. Выберем в пространстве $C_0^{\infty}(\Omega)$ такую последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, что

$$U = \lim_{k \to \infty} \varphi_k$$

в $W_2^l(\Omega)$. Пусть $v \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)$, тогда

$$(v, \check{\mathcal{L}}U)_{L_2(\Omega)} = \lim_{k \to \infty} (v, \check{\mathcal{L}}\varphi_k)_{L_2(\Omega)} = \lim_{k \to \infty} (\mathcal{L}v, \varphi_k) = 0,$$

поэтому $\check{\mathcal{L}}U \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}$. Непрерывность оператора

$$\check{\mathcal{L}} : \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega) \longrightarrow P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}$$

очевидна.

3) Итак, указанные в формулировке теоремы линейные операторы непрерывны. Поскольку для любого распределения $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство $\check{\mathcal{L}}(\check{E} * u) = u$, оператор $\check{E}*$ является мономорфизмом, а оператор $\check{\mathcal{L}}$ является эпиморфизмом. Докажем, что оператор $\check{\mathcal{L}}$ является мономорфизмом. Пусть $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и $\check{\mathcal{L}}U = 0$. Тогда $\check{\mathcal{L}}(-i\xi)\mathcal{F}U = 0$. Из включения $U \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ получаем, что $\mathcal{F}U$ – целая функция, поэтому $\mathcal{F}U = 0$. Из этого равенства следует, что $U = 0$. Мономорфность оператора $\check{\mathcal{L}}$ доказана. Из мономорфности оператора $\check{\mathcal{L}}$ следует эпиморфность оператора $\check{E}*$. Поэтому операторы $\check{E}*$ и $\check{\mathcal{L}}$ являются взаимно обратными изоморфизмами. ■

Т е о р е м а 3.12. *В пространстве* $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ *билинейная форма*

$$(U, V)_{\mathcal{L}} = (\check{\mathcal{L}}U, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)}$$

является скалярным произведением, причем нормы $\|\cdot\|_{W_2^l(\Omega)}$ *и* $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ *эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 2.12 следует существование такой константы C, что

$$\|\check{E} * u\|_{W_2^l(\Omega)} \le C\|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|\check{\mathcal{L}}U\|_{L_2(\Omega)} \le C\|U\|_{W_2^l(\Omega)}$$

при всех $u \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}$ и $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Поэтому из равенства $U = E*(\mathcal{L}U)$ следует, что

$$C^{-1}\|U\|_{W_2^l(\Omega)} \le \|\check{\mathcal{L}}U\|_{L_2(\Omega)} \le C\|U\|_{W_2^l(\Omega)}$$

при всех $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Это неравенство говорит о том, что в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ билинейная форма $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}}$ действительно является скалярным произведением, а нормы $\|\cdot\|_{W_2^l(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ эквивалентны. ■

С л е д с т в и е. *Линейное пространство* $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ *можно рассматривать как гильбертово пространство со скалярным произведением* $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}}$. *При этом топологическая структура пространства* $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ *остается неизменной.*

Т е о р е м а 4.12. *Для любой функции* $U_0 \in W_2^l(\Omega)$ *существует и единственна такая функция* $U^0 \in W_2^l(\Omega)$, *что* $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 = 0$ *и* $U^0 \in U_0 + \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. *При этом отображение*

$$A_\Omega : W_2^l(\Omega) \longrightarrow W_2^l(\Omega),$$

определяемое по правилу

$$A_\Omega : U_0 \mapsto U^0,$$

является линейным непрерывным оператором.

Доказательство. 1) *Существование.* Пусть $U_0 \in W_2^l(\Omega)$. Зададим

$$U^0 = U_0 - E * \mathfrak{P}_{P_{\check{\mathcal{L}}}(\Omega)^\perp}(\check{\mathcal{L}}U_0),$$

тогда из теоремы 2.12 следует, что $U^0 - U_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. При этом

$$\check{\mathcal{L}}U^0 = \check{\mathcal{L}}U_0 - \mathfrak{P}_{P_{\check{\mathcal{L}}}(\Omega)^\perp}(\check{\mathcal{L}}U_0) = \mathfrak{P}_{P_{\check{\mathcal{L}}}(\Omega)}(\check{\mathcal{L}}U_0),$$

поэтому $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 = 0$.

2) *Единственность.* Предположим, что для функции $U_0 \in W_2^l(\Omega)$ существуют две такие функции $U^0, U^1 \in W_2^l(\Omega)$, что $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 = \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^1 = 0$ и $U^0, U^1 \in U_0 + \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Тогда функция $U = U^1 - U^0$ удовлетворяет включению $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и равенству $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U = 0$. Из включения $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и теоремы 2.12 следует, что функция $u = \check{\mathcal{L}}U$ удовлетворяет включению $u \in P(\Omega)^\perp$. Однако $\mathcal{L}u = 0$, поэтому $u \in P(\Omega)$. Это говорит о том, что $u = 0$. Однако $U = \check{E} * u$, поэтому $U = 0$ и, значит, $U^0 = U^1$.

3) Очевидно, что отображение

$$A_\Omega : U \mapsto U - \check{E} * \mathfrak{P}_{P_{\check{\mathcal{L}}}(\Omega)^\perp}(\mathcal{L}U)$$

является линейным непрерывным оператором. ■

Следствие. *Пусть замыкание* $\mathrm{Cl}\Omega$ *области* Ω *является бесконечно дифференцируемым многообразием с краем* $\partial\Omega$. *Тогда для каждого набора функций* $V_k \in W_2^{l-k-1/2}(\partial\Omega)$, *где* $k = 0, 1, \ldots, l-1$, *существует и единственна такая функция* $U \in W_2^l(\Omega)$, *что* $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U = 0$ *и* $\gamma_\Omega^k(U) = V_k$ *при всех* $k = 0, 1, \ldots, l-1$. *При этом отображение*

$$D_\Omega : \prod_{k=0}^{l-1} W_2^{l-k-1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow W_2^l(\Omega),$$

определяемое по правилу

$$D_\Omega : (V_0, V_1, \ldots, V_{l-1}) \mapsto U,$$

является линейным непрерывным оператором.

Действительно, оператор D_Ω может быть определен по правилу

$$D_\Omega = A_\Omega \circ \varkappa_\Omega,$$

где линейный оператор $\varkappa_\Omega$ определен в теореме 13.10, а линейный оператор A_Ω – в теореме 4.12.

Построенная в следствии к теореме 4.12 функция U называется решением задачи Дирихле

$$\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U = 0$$

с граничными условиями

$$\gamma^k_\Omega(U) = V_k,$$

где $k = 0, 1, \ldots, l-1$.

Будем далее опять предполагать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное ограниченное открытое множество.

Функция $G(x, y)$, где $x, y \in \Omega$, называется функцией Грина дифференциального оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$ в области Ω, если $G(x, y) = G(y, x)$ и при каждом фиксированном $y \in \Omega$ имеют место равенство $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}G(\cdot, y) = \delta_y$ и включение $G(\cdot, y) \in \overset{\circ}{W}{}^l_2(\Omega)$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Зададим

$$\gamma_x = \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp}(E(\cdot - x)|_\Omega).$$

Проверим, что функция Грина дифференциального оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$ в области Ω представима в виде $G(x, y) = (\gamma_x, \gamma_y)_{L_2(\Omega)}$.

Действительно, равенство $G(x, y) = G(y, x)$ очевидно. Далее при фиксированном $y \in \Omega$ имеем $G(x, y) = (\check{E} * \gamma_y)(x)$. Поэтому из теоремы 2.12 следует, что $G(\cdot, y) \in \overset{\circ}{W}{}^l_2(\Omega)$. При этом, очевидно, $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}G(\cdot, y) = \delta_y$.

Пусть $E_{\mathcal{L}\mathcal{L}}$ – фундаментальное решение дифференциального оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$. Тогда теорема 3.12 позволяет представить функцию Грина в виде

$$G(\cdot, y) = A_\Omega \left\{ E_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \cdot - y)|_\Omega \right\},$$

поэтому

$$G(x, y) = E_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x - y) - R_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x, y).$$

Отметим, что функция $R_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}$ обладает следующими свойствами: при каждом фиксированном $y \in \Omega$ имеют место включение

$$E_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\cdot - y)|_\Omega - R_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\cdot, y) \in \overset{\circ}{W}{}^l_2(\Omega)$$

и равенство

$$\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}R_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(\cdot,y)=0.$$

Фактически построение функции Грина сводится к построению функции $R_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}$ посредством решения соответствующей задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$. Эта задача Дирихле и поставлена при описании свойств функции $R_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}$.

Есть случай, когда оператор A_Ω, введенный в теореме 3.12, вычисляется особенно просто – при условии, что функция$R_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}$ известна. Отметим, что фундаментальное решение $E_{\mathcal{L}}$ представимо в виде

$$E_{\mathcal{L}}=\check{\mathcal{L}}E_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}+V_{\mathcal{L}},$$

где функция $V_{\mathcal{L}}$ удовлетворяет равенству $\mathcal{L}V_{\mathcal{L}}=0$. Зададим

$$K_{\mathcal{L}}(x,y)=\check{\mathcal{L}}_xR_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x,y)+V_{\mathcal{L}}(x-y).$$

Из представления

$$G(x,y)=E_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x-y)-R_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x,y)$$

и очевидного равенства

$$\gamma_y(x)=\check{\mathcal{L}}_xG(x,y)$$

следует, что при фиксированном $y\in\Omega$ имеет место включение

$$E_{\mathcal{L}}(\cdot-y)-K_{\mathcal{L}}(\cdot,y)\in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp},$$

поскольку

$$\gamma_y(x)=E_{\mathcal{L}}(x-y)-K_{\mathcal{L}}(x,y).$$

Т е о р е м а 5.12. *Пусть* $u_0\in L_2(\Omega)$ *и* $U_0=\check{E}*u_0$. *Тогда*

$$A_\Omega U_0(y)=\int\limits_\Omega K_{\mathcal{L}}(x,y)u_0(x)dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим

$$U^0(y)=\int\limits_\Omega K_{\mathcal{L}}(x,y)u_0(x)dx.$$

Проверим включение $U^0\in U_0+\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Очевидно, что

$$\check{E}*\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(u_0)\in\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega),$$

поэтому требуемое включение следует из равенства

$$\check{E} * \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(u_0)(y) = \int\limits_{\Omega} E(x-y)\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(u_0)(x)dx =$$

$$\int\limits_{\Omega} [E(x-y) - K_{\mathcal{L}}(x,y)]u_0(x)dx = U_0(y) - U^0(y).$$

Докажем равенство $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 = 0$. Действительно, пусть $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Тогда

$$(\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0, \varphi) = (U^0, \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}\varphi) = \int\limits_{\Omega} U^0(y)\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}\varphi(y)dy =$$

$$\int\limits_{\Omega} \left[\int\limits_{\Omega} K_{\mathcal{L}}(x,y)u_0(x)dx\right] \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}\varphi(y)dy =$$

$$\int\limits_{\Omega} u_0(x) \left[\int\limits_{\Omega} K_{\mathcal{L}}(x,y)\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}\varphi(y)dy\right] dx =$$

$$\int\limits_{\Omega} u_0(x)(\mathcal{L}_y\check{\mathcal{L}}_y K_{\mathcal{L}}(x,\cdot),\varphi)dx = 0. \quad \blacksquare$$

С л е д с т в и е. *Справедливы следующие равенства:*

$$\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(u)(y) = \check{\mathcal{L}}_y \int\limits_{\Omega} K_{\mathcal{L}}(x,y)u(x)dx,$$

$$\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(u)(y) = \check{\mathcal{L}}_y \int\limits_{\Omega} \gamma_y(x)u(x)dx.$$

В тех случаях, когда в первой формуле допустимо дифференцирование под знаком интеграла, она становится более симметричной:

$$\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(u)(y) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{L}_x\check{\mathcal{L}}_y R_{\mathcal{L}}(x,y)u(x)dx.$$

Мы пользуемся традиционными обозначениями для оператора Лапласа и градиента:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Т е о р е м а 1.13. *Имеют место равенства*

$$\Delta \ln \|x\|^2 = 4\pi\delta_0 \qquad при\ n = 2,$$
$$\Delta \|x\|^{2-n} = 4\frac{(1-n/2)\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\delta_0 \qquad при\ n \geq 3.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При всех $x \in \mathbb{R}^n \backslash 0$ имеют место равенства

$$\Delta \ln \|x\|^2 = 0, \quad \text{если } n = 2,$$
$$\Delta \|x\|^{2-n} = 0, \quad \text{если } n \geq 3.$$

При этом

$$\ln \|\cdot\|^2 \in L_1(\mathbb{R}^2)^{\text{loc}}, \quad \text{если } n = 2,$$
$$\|\cdot\|^{2-n} \in L_1(\mathbb{R}^n)^{\text{loc}}, \quad \text{если } n \geq 3.$$

После этих тривиальных замечаний доказательство теоремы осуществляется стандартным применением формулы Грина

$$\int\limits_\Omega (u\Delta v - \Delta u v)dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \upsilon} - \frac{\partial u}{\partial \upsilon} v \right) ds,$$

где υ – внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$, ограничивающей область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $n = 2$. Тогда

$$(\Delta \ln \|x\|^2, \varphi) = (\ln \|x\|^2, \Delta\varphi) = \int \ln \|x\|^2 \Delta\varphi(x)dx =$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^2 \backslash \varepsilon \mathbb{D}^2} \ln \|x\|^2 \Delta\varphi(x)dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial\,\varepsilon\mathbb{D}^2}\left(\ln\|x\|^2\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\upsilon}-\frac{\partial\ln\|x\|^2}{\partial\upsilon}\varphi(x)\right)ds=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial\,\varepsilon\mathbb{D}^2}\left(\ln\left\{\varepsilon^2\left(\frac{x}{\varepsilon},\nabla\varphi(x)\right)\right\}+\frac{2}{\varepsilon}\varphi(x)\right)ds.$$

Легко видеть, что из неравенства

$$\int\limits_{\partial\,\varepsilon\mathbb{D}^2}\ln\left\{\varepsilon^2\left(-\frac{x}{\varepsilon},\nabla\varphi(x)\right)\right\}ds\le 2\pi\varepsilon|\ln\varepsilon^2|\sup_{x\in\mathbb{R}^2}\|\nabla\varphi(x)\|$$

следует предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial\,\varepsilon\mathbb{D}^2}\ln\left\{\varepsilon^2\left(-\frac{x}{\varepsilon},\nabla\varphi(x)\right)\right\}ds=0.$$

Кроме того,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\partial\,\varepsilon\mathbb{D}^2}\varphi(x)ds=2\pi\varphi(0),$$

поэтому

$$(\Delta\ln\|x\|^2,\varphi)=4\pi\varphi(0)=(4\pi\delta_0,\varphi)$$

Пусть $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $n\ge 3$. Тогда

$$(\Delta x\|x\|^{2-n},\varphi)=(\|x\|^{2-n},\Delta\varphi)=\int\|x\|^{2-n}\Delta\varphi(x)dx=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\varepsilon\mathbb{D}^n}\|x\|^{2-n}\Delta\varphi(x)dx=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial\,\varepsilon\mathbb{D}^n}\left\{\|x\|^{2-n}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\upsilon}-\frac{\partial\|x\|^{2-n}}{\partial\upsilon}\varphi(x)\right\}ds=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial\,\varepsilon\mathbb{D}^n}\{\varepsilon^{2-n}(-x/\varepsilon,\nabla\varphi(x))+2(1-n/2)\varepsilon^{1-n}\varphi(x)\}ds.$$

Легко видеть, что из неравенства

$$\left|\varepsilon^{2-n}\int\limits_{\partial\,\varepsilon\mathbb{D}^n}(-x/\varepsilon,\nabla\varphi(x))ds\right|\le 2\varepsilon\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|\nabla\varphi(x)\|,$$

где $2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ – площадь поверхности единичной сферы, следует соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int\limits_{\partial\,\varepsilon\,\mathbb{D}^n}\varepsilon^{2-n}(-x/\varepsilon,\nabla\varphi(x))ds\right|=0.$$

Кроме того, очевидно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-n}\int\limits_{\partial\,\varepsilon\,\mathbb{D}^n}\varphi(x)ds=2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\varphi(0),$$

поэтому

$$(\Delta\|x\|^{2-n},\varphi)=4\frac{(1-n/2)\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\varphi(0)=\left(4\frac{(1-n/2)\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\delta_0\,,\varphi\right).\quad\blacksquare$$

Т е о р е м а 2.13. *Функция*

$$E_l(x)=\begin{cases}\frac{1}{c_{l\,n}\|x\|^{2(l-n/2)}}\ln\|x\| & \textit{при четном } n \textit{ и } l\geq n/2,\\ \frac{1}{c_{l\,n}\|x\|^{2(l-n/2)}} & \textit{при нечетном } n \textit{ или } l<n/2,\end{cases}$$

где

$$c_{ln}=\begin{cases}(-1)^{n/2-1}4^l(l-1)!\pi^{n/2}(l-n/2)! & \\ \qquad\textit{при четном } n \textit{ и } l\geq n/2,\\ \prod_{i=1}^{l}(i-n/2)4^l(l-1)!\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1} & \\ \qquad\textit{при нечетном } n \textit{ или } l<n/2,\end{cases}$$

является фундаментальным решением оператора Δ^l.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $l=1$ функция E_1 имеет вид

$$E_1(x)=\begin{cases}(4\pi)^{-1}\ln\|x\|^2 & \text{при } n=2,\\ (4(1-n/2)\pi^{n/2}/\Gamma(n/2))^{-1}\|x\|^{2(l-n/2)} & \text{при } n>2.\end{cases}$$

Поэтому равенство $\Delta E_1=\delta_0$ следует из теоремы 1.13.

Зададим

$$F_t(x)=\|x\|^{2t},$$
$$H_t(x)=\|x\|^{2t}\ln\|x\|^2.$$

Пусть $t>1-n/2$. Тогда функции F_t, F_{t-1}, H_t и H_{t-1} принадлежат $L_1(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$ и в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства

$$\Delta F_t=4(t-1+n/2)tF_{t-1},$$
$$\Delta H_t=4(t-1+n/2)tH_{t-1}+4(2t-1+n/2)H_{t-1},$$

доказываемые с помощью формулы Грина.

Теперь случай $l \geq 2$ последовательно сводится к рассмотренному выше случаю $l = 1$.

Пусть n четное и $l \geq n/2$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\Delta H_{l-n/2} = 4(l-1)(l-n/2)H_{l-n/2-1} + 4(2l-1-n/2)F_{l-n/2-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Delta H_1 = 4(n/2)(1)H_0 + 4(1+n/2), \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta H_0 = 4(n/2-1)F_{-1},$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta F_{-1} = 4(n/2-2)(-1)F_{-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Delta F_{2-n/2} = 4(2-n/2)F_{1-n/2}, \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta F_{1-n/2} = 4(1-n/2)\pi^{n/2}\Gamma(n/2)\delta_0,$$

поэтому

$$\Delta^l(\|x\|^{2(l-n/2)}\ln\|x\|^2) = (-1)^{n/2-1}4^l(l-1)!(l-n/2)!\pi^{n/2}\delta_0.$$

Пусть n нечетное или $l < n/2$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\Delta F_{l-n/2} = 4(l-1)(l-n/2)F_{l-n/2-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Delta F_{2-n/2} = 4(2-n/2)F_{1-n/2}, \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta F_{1-n/2} = 4(1-n/2)\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)\delta_0\ ,$$

поэтому

$$\Delta^l\|x\|^{2(l-n/2)} = \prod_{i=1}^{l}(i-n/2)4^l(l-1)!\pi^{n/2}\Gamma(n/2)^{-1}\delta_0. \quad \blacksquare$$

Пусть $l > n/2$ и $r > 0$. Наша ближайшая цель – вычислить и изучить функцию Грина $G_l(x,y)$ дифференциального оператора Δ^l в шаре $r\mathbb{D}^n$. Для этого достаточно вычислить функцию $R_l(x,y)$ такую, что при каждом фиксированном $y \in r\mathbb{D}^n$ эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta^n R_l(x,y) = 0, \quad x \in r\mathbb{D}^n$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial^i R_l(x,y)}{\partial \upsilon^i} = \frac{\partial^i E(x-y)}{\partial \upsilon^i}, \quad x \in \partial r\mathbb{D}^n, \quad i = 0,1,\ldots,l-1.$$

Через $\upsilon(x)$ обозначена нормаль к сфере $\partial r\mathbb{D}^n$ в точке $x \in \partial r\mathbb{D}^n$. После того, как указанная функция $R_l(x,y)$ вычислена, искомая функция Грина представима в виде

$$G_l(x,y) = E_l(x-y) - R_l(x,y).$$

Условимся функцию u называть k-гармонической, если в области ее определения имеет место равенство $\Delta^k u = 0$.

Т е о р е м а 3.13. *Пусть функция $u(x)$ является k-гармонической и $l \geq k$. Тогда функция $\|x\|^{2(l-k)}u(x)$ является l-гармонической.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что мы пользуемся обозначением

$$F_t(x) = \|x\|^{2t}.$$

Выпишем несколько очевидных, но полезных равенств. Легко видеть, что

$$\Delta(vw) = \Delta v w + 2(\nabla v, \nabla w) + v\Delta w. \tag{1.13}$$

Из формулы (1.13) следует, что

$$\Delta(F_t u) = F_{t-1}[4(t-1+n/2)tu + 4t(x,\nabla u)] + F_t\Delta u. \tag{2.13}$$

Легко видеть, что

$$\Delta(x,\nabla u) = 2\Delta u + (x,\nabla\Delta u),$$

поэтому

$$\Delta^k(x,\nabla u) = 2k\Delta u + (x,\nabla\Delta^k u) \tag{3.13}$$

при всех $k = 1,2,\ldots$.

Докажем теперь утверждение, сформулированное в теореме, индукцией по $l-k$.

При $l-k=0$ доказательство очевидно. Пусть $l-k \geq 1$ и при $l-k-1$ утверждение доказано. Тогда из (2.13) следует, что

$$\Delta(F_{l-k}u) = F_{l-k-1}[4(l-k-1+n/2)(l-k)u + 4(l-k)(x,\nabla u)] + F_{l-k}\Delta u.$$

Из (3.13) следует, что функция $4(l-k-1+n/2)(l-k)u+4(l-k)(x,\nabla u)$ является k-гармонической. Функция Δu является $(k-1)$-гармонической, поэтому из индукционного предположения следует, что функция $\Delta(F_{l-k}u)$ является $(l-1)$-гармонической. Это говорит о том, что функция $F_{l-k}u$ является l-гармонической. ■

Введем в рассмотрение функцию

$$g_l(\lambda) = \frac{-1}{c_{ln}}\left(\ln(r^2+\lambda) - \sum_{i=0}^{l-n/2} a_i\lambda^i - \sum_{i=l-n/2+1}^{l-1} a_i\frac{\lambda^i}{(r^2+\lambda)^{i-l+n/2}}\right)$$

при четном n и

$$g_l(\lambda) = \frac{1}{c_{ln}} \left(1 - (r^2 + \lambda)^{1-n/2} \sum_{i=0}^{l-1} a_i \lambda^i \right)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}$ выбираются так, что

$$g_l^{(0)}(0) = g_l^{(1)}(0) = \cdots = g_l^{(l-1)}(0) = 0.$$

Фактически в следующей теореме доказывается, что

$$G_l(x,y) = \|x-y\|^{2(l-n/2)} g_l \left(\frac{(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)}{\|x-y\|^2} \right).$$

Т е о р е м а 4.13. *Пусть $l > n/2$. Тогда функция Грина $G_l(x,y)$ оператора Δ^l в шаре $r\mathbb{D}^n$ имеет вид*

$$G_l(x,y) = E_l(x-y) - R_l(x,y),$$

где при четном n имеет место равенство

$$R_l(x,y) = \frac{1}{c_{ln}} \{ \|x-y\|^{2(l-n/2)} \ln(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4) -$$
$$\sum_{i=0}^{l-n/2} \alpha_i [(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)]^i \|x-y\|^{2(l-n/2-i)} -$$
$$\sum_{i=l-n/2+1}^{l-1} \alpha_i [(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)]^i (\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4)^{l-n/2-i} \},$$

а при нечетном n имеет место равенство

$$R_l(x,y) = \frac{1}{c_{ln}} (\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4)^{1-n/2} \times$$
$$\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i [(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)]^i \|x-y\|^{2(l-1-i)}.$$

В этих равенствах коэфициент

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{i!} \frac{d^i \ln(r^2+\lambda)}{d\lambda^i}(0) & \text{при четном } n, \\ \frac{1}{i!} \frac{d^i (r^2+\lambda)^{n/2-1}}{d\lambda^i}(0) & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка $\|y\| < r$ фиксирована. Докажем, что при $\|x\|\|y\| < r^2$ имеет место равенство

$$\Delta^l R_l(x,y) = 0. \tag{4.13}$$

Пусть $y = 0$. Тогда равенство (4.13) очевидным образом справедливо при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $y \neq 0$. Принимая во внимание тождество

$$\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4 = \|y\|^2\|x - (r^2/\|y\|^2)y\|,$$

получаем, что

$$\Delta(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4)^{1-n/2} = \|y\|^{2-n}\Delta\|x - (r^2/\|y\|^2)y\|^{1-n/2} = 0$$

при $x \neq (r^2/\|y\|^2)y$. Поэтому при $x \neq (r^2/\|y\|^2)y$ функция

$$(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4)^{1-n/2}$$

является гармонической. В частности, эта функция является гармонической при $\|x\| < r^2/\|y\|$. Важно заметить, что $0 < \|y\| < r$.

Пусть n четное. Тогда функция

$$\ln(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4) = \ln\|y\|^2 + \ln\|x - (r^2/\|y\|^2)y\|$$

является $n/2$-гармонической, поэтому функция

$$\|x-y\|^{2(l-n/2)} ln(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4)$$

является l-гармонической. При $0 \leq i \leq l - n/2$ функция

$$[(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)]^i\|x-y\|^{2(l-n/2-i)}$$

является l-гармонической как многочлен степени $l-1$. При $l - n/2 + 1 \leq i \leq l-1$ функция

$$[(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)]^i(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4)^{l-n/2-i}$$

является l-гармонической, поскольку функция

$$(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4)^{l-n/2-i} =$$
$$\|y\|^{2(l-n/2-i)}\|x - (r^2/\|y\|^2)y\|^{2(l-1-i)}\|x - (r^2/\|y\|^2)y\|^{2-n}$$

является $(l-i-1)$-гармонической, а функция

$$[(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)]^i$$

– $(i+1)$-гармонической. Это доказывает равенство (4.13) при четном n.

Пусть n – нечетное. Тогда функция

$$(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4)^{1-n/2}\|x-y\|^{2(l-1-i)}$$

является $(l-i)$-гармонической, а функция

$$(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4)^{1-n/2}[(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)]^i\|x-y\|^{2(l-1-i)}$$

является l-гармонической. Это доказывает равенство (4.13) при нечетном n.

Проверим теперь граничные условия. Пусть $x \neq y$. Тогда

$$\frac{\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4}{\|x-y\|^2} = r^2 + \frac{(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)}{\|x-y\|^2}.$$

Поэтому имеет место равенство

$$G_l(x,y) = \|x-y\|^{2(l-n/2)}\gamma_l\left(\frac{(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)}{\|x-y\|^2}\right),$$

где

$$g_l(\lambda) = \frac{-1}{c_{ln}}\left(\ln(r^2+\lambda) - \sum_{i=0}^{l-n/2} a_i\lambda^i - \sum_{i=l-n/2+1}^{l-1} a_i\frac{\lambda^i}{(r^2+\lambda)^{i-l+n/2}}\right)$$

при четном n и

$$g_l(\lambda) = \frac{1}{c_{ln}}\left(1 - (r^2+\lambda)^{1-n/2}\sum_{i=0}^{l-1} a_i\lambda^i\right)$$

при нечетном n.

Пусть $\|x\| = r$. В случае шара радиусом r имеет место равенство $\upsilon(x) = x/r$, поэтому

$$\frac{\partial^i G_l(x,y)}{\partial\upsilon^i} = \left.\frac{d^i G_l(tx,y)}{dt^i}\right|_{t=1}, \quad i = 0,1,\ldots,l-1.$$

Легко видеть, что $g_l^{(i)}(0) = 0$, $i = 0,1,\ldots,l-1$. Поэтому требуемое равенство

$$\frac{\partial^i G_l(x,y)}{\partial\upsilon^i} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,l-1$$

следует из правила дифференцирования сложной функции. ■

В случае $n = 2$ данная теорема доказана [30].

Т е о р е м а 6.13. *Пусть $l > n/2$ и $G_l(x,y)$ – функция Грина оператора Δ^l в шаре $\mathbb{D}^n$. Тогда $G_l(x,y) > 0$ при $x, y \in \mathbb{D}^n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = y$. Тогда

$$G_l(x,x) = \frac{-1}{c_{ln}} \left(\sum_{i=l-n/2}^{l-1} \frac{(-1)^i}{i} \right) (\|x\|^2 - 1)^{2(l-n/2)} > 0,$$

при четном n и

$$G_l(x,x) = \frac{-1}{c_{ln}} \frac{1}{(l-1)!} \prod_{i=1}^{l-1} (n/2 - i)(\|x\|^2 - 1)^{2(l-n/2)} > 0,$$

при нечетном n. Поэтому $G_l(x,x) > 0$. Пусть $x \neq y$. Рассмотрим опять представление функции Грина в виде

$$G_l(x,y) = \|x-y\|^{2(l-n/2)} g_l \left(\frac{(\|x\|^2 - 1)(\|y\|^2 - 1)}{\|x-y\|^2} \right).$$

Зададим функцию

$$f_l(\lambda) = (1+\lambda)^{n/2-1} g_l(\lambda).$$

Пусть n четное. Тогда

$$f_l(\lambda) = \frac{-1}{c_{ln}} (1+\lambda)^{n/2-1} \ln(1+\lambda) + \{\text{многочлен степени } l-1\}.$$

Пусть n нечетное. Тогда

$$f_l(\lambda) = \frac{1}{c_{ln}} (1+\lambda)^{n/2-1} + \{\text{многочлен степени } l-1\}.$$

Поэтому

$$f_l^{(l)}(\lambda) = \frac{-1}{c_{ln}} (-1)^{l-n/2} (l-n/2)!(n/2-1)! \frac{1}{(1+\lambda)^{l-n/2+1}}$$

в случае четного n и

$$f_l^{(l)}(\lambda) = \frac{1}{c_{ln}} \prod_{i=1}^{l} (n/2 - i) \frac{1}{(1+\lambda)^{l-n/2+1}}$$

в случае нечетного n. Из этих соотношений следует, что

$$f_l^{(l)}(\lambda) > 0$$

при всех $\lambda \geq 0$. Однако

$$f_l^{(0)}(0) = f_l^{(1)}(0) = \cdots = f_l^{(l-1)}(0) = 0.$$

Поэтому

$$f_l(\lambda) > 0$$

при всех $\lambda \geq 0$. Это доказывает неравенство $G_l(x, y) > 0$.

■

З а м е ч а н и е. Иное доказательство этой теоремы имеется в [5].

В качестве примера проведем вычисления, связанные с функцией Грина оператора Δ^l в шаре $r\mathbb{D}^n$ при малых l и n.

1) $l = 2$ и $n = 2$. В этом случае

$$E_2(x) = \frac{1}{16\pi}\|x\|^2 \ln \|x\|^2,$$

$$R_2(x, y) = \frac{1}{16\pi}\{\|x - y\|^2 \ln(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x, y)r^2 + r^4) +$$

$$\ln r^2\|x - y\|^2 - \frac{1}{r^2}(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)\}.$$

2) $l = 4$ и $n = 2$. В этом случае

$$E_4(x) = \frac{1}{4^5 9\pi}\|x\|^6 \ln \|x\|^2,$$

$$R_2(x, y) = \frac{1}{4^5 9\pi}\{\|x - y\|^6 \ln(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x, y)r^2 + r^4) +$$

$$\ln r^2\|x - y\|^6 - \frac{1}{r^2}(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)\|x - y\|^4 +$$

$$\frac{1}{2r^4}[(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)]^2\|x - y\|^2 - \frac{1}{3r^6}[(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)]^3\}.$$

3) $l = 2$ и $n = 3$. В этом случае

$$E_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\|x\|,$$

$$R_2(x, y) = -\frac{1}{2\pi}(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x, y)r^2 + r^4)^{-1/2} \times$$

$$\{r\|x - y\|^2 + \frac{1}{2r}(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)\}.$$

4) $l = 4$ и $n = 3$. В этом случае

$$E_4(x) = -\frac{1}{5!4\pi}\|x\|,$$

$$R_4(x,y) = -\frac{1}{5!4\pi}(\|x\|^2\|y\|^2 - 2(x,y)r^2 + r^4)^{-1/2}\times$$
$$\{r\|x-y\|^6 + \frac{1}{2r}(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)\|x-y\|^4\times$$
$$[(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)]^2\|x-y\|^2[(\|x\|^2 - r^2)(\|y\|^2 - r^2)]^3\}.$$

§14. Сплайн-интерполяция

Будем распределение $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называть $\mathcal{L}$-сплайном, если носитель $\operatorname{supp}\mathcal{L}U$ распределения $\Lambda = \mathcal{L}U$ конечен.

Пусть распределение $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ является $\mathcal{L}$-сплайном и $\operatorname{supp}\mathcal{L}U = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Тогда распределение $\mathcal{L}U$ имеет конечный порядок, и поэтому при некоторых натуральных $p_1, \ldots, p_k$ имеет место представление

$$\mathcal{L}U = \sum_{i=1}^{k}\sum_{|\alpha|\le p_i} A_{i\alpha}\partial^\alpha \delta x_i.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{L}$-сплайн U представим в виде

$$U(x) = V(x) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{|\alpha|\le p_i} A_{i\alpha}\partial^\alpha E(x - x_i),$$

где функция $V \in C^\infty(\Omega)$ удовлетворяет равенству $\mathcal{L}V = 0$.

З а м е ч а н и е. Близкое по духу определение $\mathcal{L}$-сплайнов для многомерного случая имеется в работе [31].

Следующая теорема является непосредственным обобщением на многомерный случай известной теоремы о полиномиальной сплайн-интерполяции [31,32]. (Полиномиальный случай возникает при $n = 1$ и $\mathcal{L} = d^l/dx^l$.)

Т е о р е м а 1.14. *Пусть заданы точки $x_i \in \Omega$, где $1 \le i \le k$, и такие мультииндексы α_{ij}, где $1 \le i \le k$ и $1 \le j \le k_i$, что $|\alpha_{ij}| < l - n/2$ при $1 \le i \le k$, $1 \le j \le k_i$. Обозначим через $\mathcal{E}$ фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$. Тогда для любой функции $U_0 \in W_2^l(\Omega)$ существует и единствен $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайн $U^0 \in W_2^l(\Omega)$ вида*

$$U^0(x) = V^0(x) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}\partial^{\alpha_{ij}}\mathcal{E}(x - x_i),$$

где $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}V^0 = 0$, *удовлетворяющий краевым условиям* $U^0 \in U_0 + \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ *и интерполяционным условиям* $\partial^{\alpha_{ij}} U^0(x_i) = \partial^{\alpha_{ij}} U_0(x_i)$ *при* $1 \le i \le k$ *и* $1 \le j \le k_i$.

Доказательство. *Существование.* Пусть $U_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Введем множество $L(U_0) = \{U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)\colon\ \partial^{\alpha_{ij}} U(x_i) = \partial^{\alpha_{ij}} U_0(x_i),\ 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le k_i\}$. Очевидно, что $L(U_0) = U_0 + L(0)$. При этом $L(0)$ – замкнутое линейное подпространство пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$.

Пусть функция U^0 является решением задачи минимизации

$$\|\check{\mathcal{L}}U\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[U \in L(U_0)]{} \min.$$

Докажем, что функция U^0 является искомым $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайном.

Геометрически это означает, что искомый $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайн U^0 реализует расстояние от гиперплоскости $L(U_0)$ до начала координат в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ с нормой $\|U\|_{\mathcal{L}} = \|\check{\mathcal{L}}U\|_{L_2(\Omega)}$.

Дальнейшие рассуждения основываются на том, что

$$(\check{\mathcal{L}}U^0, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = 0$$

при всех $V \in L(0)$. Это равенство непосредственно следует из определения функции U^0 как решения задачи минимизации.

Пусть носитель пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ не содержит точек $x_1, \ldots, x_k$. Тогда $\varphi \in L(0)$, и поэтому $(\check{\mathcal{L}}U^0, \check{\mathcal{L}}\varphi)_{L_2(\Omega)} = (\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0, \varphi) = 0$. Отсюда следует, что $\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 \subset \{x_1, \ldots, x_k\}$. Поэтому функция U^0 является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайном и

$$\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{|\alpha| \le p_i} A_{i\alpha} \partial^\alpha \delta x_i$$

при некоторых $p_1, \ldots, p_k$.

Докажем, что в этом представлении $A_{i\alpha} = 0$ при $\alpha \ne \alpha_{ij}$, где $1 \le i \le k$ и $1 \le j \le k_i$. Фиксируем $1 \le m \le k$. Пусть $|\beta| \le p_m$ и $\beta \ne \alpha_{mj}$ при $1 \le j \le k_m$. Пусть пробная функция $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ равна 1 в некоторой окрестности точки x_m и ее носитель не содержит точек $x_1, \ldots, x_{m-1}, x_{m+1}, \ldots, x_k$.

Зададим

$$\varphi(x) = \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!}(x - x_m)^\beta \psi(x).$$

Легко видеть, что

$$\partial^\alpha \varphi(x_m) = \begin{cases} (-1)^{|\beta|} & \text{при } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{при } \alpha \ne \beta, \end{cases}$$

поэтому

$$(\check{\mathcal{L}}U^0, \check{\mathcal{L}}\varphi)_{L_2(\Omega)} = (\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0, \varphi) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{|\alpha| \le P_i} A_{i\alpha}(\partial^\alpha \delta x_i, \varphi) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{|\alpha| \le P_i} A_{i\alpha}(-1)^{|\alpha|}(\delta x_i, \partial^\alpha \varphi) =$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{|\alpha| \le P_i} A_{i\alpha}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi(x_i) = A_{m\beta}.$$

Так как $\varphi \in L(0)$, то $A_{m\beta} = 0$, следовательно,

$$\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}\partial^{\alpha_{ij}}\delta_{x_i},$$

поэтому

$$U^0(x) = V^0(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}\partial^{\alpha_{ij}}\mathcal{E}(x - x_i),$$

где $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}V^0 = 0$.

Единственность. Докажем, что функция $U^0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$, удовлетворяющая указанным в формулировке теоремы условиям, является решением задачи минимизации

$$\|\check{\mathcal{L}}U\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[U \in L(U_0)]{} \min.$$

Для этого достаточно доказать, что $(\check{\mathcal{L}}U^0, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = 0$ при всех $V \in L(0)$.

Пусть $V \in L(0)$ и $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in C_0^\infty(\Omega)$ – такая последовательность пробных функций, что

$$V = \lim_{m \to \infty} \varphi_m$$

в $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Тогда из неравенства $|\alpha_{ij}| < l - n/2$ следует, что

$$\partial^{\alpha_{ij}} V(x_i) = \lim_{m \to \infty} \partial^{\alpha_{ij}}\varphi_m(x_i),$$

поэтому

$$(\check{\mathcal{L}}U^0, \check{\mathcal{L}}\varphi_m)_{L_2(\Omega)} = (\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0, \varphi_m) =$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}(-1)^{|\alpha_{ij}|}\partial^{\alpha_{ij}}\varphi_m(x_i) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Таким образом,

$$(\check{\mathcal{L}}U^0, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = \lim_{m\to\infty}(\check{\mathcal{L}}U^0, \check{\mathcal{L}}\varphi_m)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Пусть $U_0 \in W_2^l(\Omega)$. Возьмем функцию $U_1 \in W_2^l(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U_1 = 0$ и включению $U_1 \in U_0 + \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. (Функция U_1 существует, единственна и определяется посредством решения задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$.) Положим $W_0 = U_0 - U_1$ и обозначим через $W^0 \in W_2^l(\Omega)$ тот единственный интерполяционный $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайн, построенный для функции W_0, существование которого было установлено выше. Очевидно, что функция $U^0 = W^0 + U_1$ является искомым интерполяционным $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайном. Единственность интерполяционного $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайна U^0 очевидна. ■

Т е о р е м а 2.14. *Пусть точки $x_1, x_2, \ldots$ образуют всюду плотное подмножество в множестве Ω и $U_0 \in W_2^l(\Omega)$. Обозначим через U_k тот единственный $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайн вида*

$$U_k(x) = V_k(x) + \sum_{i=1}^{k} a_{ki}\mathcal{E}(x - x_i),$$

где $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}V_k = 0$, удовлетворяющий краевым условиям $U_k \in U_0 + \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и интерполяционным условиям $U_k(x_i) = U_0(x_i)$ при $1 \le i \le k$. Тогда

$$U_0 = \lim_{k\to\infty} U_k$$

в пространстве $W_2^l(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Обозначим через $\mathrm{Lin}(\gamma_{x_1}, \ldots, \gamma_{x_k})$ линейную оболочку множества векторов $\{\gamma_{x_1}, \ldots, \gamma_{x_k}\}$. Докажем, что

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp} = \mathrm{Cl}\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{Lin}(\gamma_{x_1}, \ldots, \gamma_{x_k}).$$

Включение

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp} \supset \mathrm{Cl}\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{Lin}(\gamma_{x_1}, \ldots, \gamma_{x_k})$$

очевидно. Пусть вектор $v \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}$ удовлетворяет равенству

$$(v, \gamma_{x_k})_{L(\Omega)} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Зададим $V = \check{\mathcal{E}} * v$. Тогда $V \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и

$$V(x_k) = (\delta_{x_k}, V) = (\mathcal{L}\gamma_{x_k}, V) = (\gamma_{x_k}, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = (\gamma_{x_k}, v)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Из непрерывности функции V следует, что $V = 0$, поэтому $v = 0$. Полученное равенство доказывает противоположное включение

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp} \subset \mathrm{Cl} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Lin}(\gamma_{x_1}, \ldots, \gamma_{x_k}).$$

2) Пусть $U_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Из теоремы 1.10 следует, что функция $u_k = \check{\mathcal{L}}U_k$ является решением задачи минимизации

$$\|u - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[u \in \mathrm{Lin}(\gamma_{x_1}, \ldots, \gamma_{x_k})]{} \min,$$

где $u_0 = \check{\mathcal{L}}U_0$. Однако $u_0 \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}$, поэтому из 1) следует, что

$$u_0 = \lim_{k \to \infty} u_k$$

в пространстве $L_2(\Omega)$. Следовательно,

$$U_0 = \lim_{k \to \infty} U_k$$

в пространстве $W_2^l(\Omega)$.

3) Пусть $U_0 \in W_2^l(\Omega)$ и $U_1 \in W_2^l(\Omega)$ – такая функция, что $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U_1 = 0$ и $U_1 - U_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Зададим $W_0 = U_0 - U_1$, тогда $W_0 = \lim\limits_{k \to \infty} W_k$ в пространстве $W_2^l(\Omega)$, где $W_k - \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайн, интерполирующий функцию W_0 в точках $x_1, \ldots, x_k$. Очевидно, что $U_k = U_1 + W_k$, поэтому справедливо предельное соотношение, указанное в теореме.

Остановимся далее более подробно на задаче сплайн-интерполяции в одномерном случае. В этом случае $\mathcal{L} = \sum_{i=0}^{l} a_i \frac{d^i}{dx^i}$, при этом можно считать, что $a_l = 1$. Следует также отметить, что в одномерном случае l может быть произвольным натуральным числом.

Напомним определение и изложим некоторые свойства систем Чебышева [33].

Пусть на отрезке $\Omega = [a, b]$ заданы функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{l-1}$ и точки $x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}$, где $l \geq 1$. Положим

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 \ldots x_{l-1} \\ \varphi_0 \ldots \varphi_{l-1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \cdots & \varphi_0(x_{l-1}) \\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_1(x_{l-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{l-1}(x_0) & \varphi_{l-1}(x_1) & \cdots & \varphi_{l-1}x_{l-1}) \end{pmatrix}.$$

Система непрерывных функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{l-1}$ называется системой Чебышева на отрезке Ω, если

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 \ldots x_{l-1} \\ \varphi_0 \ldots \varphi_{l-1} \end{pmatrix} \neq 0$$

для любых попарно различных точек $x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}$ этого отрезка.

Легко видеть, что непрерывные функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{l-1}$ тогда и только тогда образуют систему Чебышева на Ω, когда функция

$$\varphi = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \cdots + c_{l-1}\varphi_{l-1}$$

может обращаться в нуль в l попарно различных точках Ω только при

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_{l-1} = 0.$$

Заметим еще, что функции, образующие систему Чебышева, заведомо линейно независимы. Классическим примером системы Чебышева служит система функций $1, x, \ldots, x^{l-1}$.

Обозначим через Z решение дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}u = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\left.\begin{array}{l} Z^{(0)}(0) = 0 \\ Z^{(1)}(0) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ Z^{(l-2)}(0) = 0 \end{array}\right\} \text{ при } l \geq 2,$$
$$Z^{(l-1)}(0) = 1.$$

Зададим функцию Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Зададим функцию $E = Z\theta$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= Z^{(0)}\theta, \\ E^{(1)} &= Z^{(1)}\theta, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E^{(l-1)} &= Z^{(l-1)}\theta, \\ E^{(l)} &= Z^{(l)}\theta + \delta_0. \end{aligned}$$

Поэтому $\mathcal{L}E = (\mathcal{L}Z)\theta + \delta_0 = \delta_0$ и, следовательно, функция $E = Z\theta$ является фундаментальным решением дифференциального оператора $\mathcal{L}$.

Выясним, при каких условиях функции $Z^{(0)}, Z^{(1)}, \ldots, Z^{(l-1)}$ образуют систему Чебышева на отрезке $\Omega = (a, b)$.

Будем говорить, что дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ допускает факторизацию на отрезке Ω, если на отрезке $[a, b]$ существуют такие непрерывные вещественные функции $\psi_1, \ldots, \psi_l$, что

$$\mathcal{L}\varphi = \left\{ \left(\frac{d}{dx} - \psi_1 \right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - \psi_l \right) \right\} \varphi$$

при всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Положим

$$h(\mathcal{L}) = \max\{\operatorname{Im}\lambda_1, \ldots, \operatorname{Im}\lambda_l\},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ – корни характеристического многочлена $\mathcal{L}(\lambda)$ дифференциального оператора $\mathcal{L}$. Очевидно, что $h(\mathcal{L}) \geq 0$ и $h(\mathcal{L}) = 0$ тогда и только тогда, когда все корни характеристического многочлена $\mathcal{L}(\lambda)$ – вещественные.

Т е о р е м а 3.14. *Пусть $b - a < \pi/h(\mathcal{L})$. Тогда на отрезке Ω дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ допускает факторизацию.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве сформулированной теоремы мы пользуемся приемом, примененным в работе [34].

Очевидно, что если многочлен $\mathcal{L}(\lambda)$ представим в виде произведения многочленов $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$, т.е. $\mathcal{L}(\lambda) = \mathcal{L}_1(\lambda)\mathcal{L}_2(\lambda)$, причем дифференциальные операторы $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ допускают факторизацию на отрезке Ω, то и дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ допускает факторизацию на этом отрезке.

Характеристический многочлен $\mathcal{L}(\lambda)$ дифференциального оператора $\mathcal{L}$ имеет только вещественные коэффициенты. Поэтому этот многочлен может быть разложен в произведение вещественных многочленов первой степени и вещественных многочленов второй степени, имеющих комплексные сопряженные корни. Поэтому из сделанного выше замечания следует, что для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $l = 2$, поскольку случай $l = 1$ очевиден. При этом можно предполагать, что характеристический многочлен

$$\mathcal{L}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \lambda^2$$

имеет комплексные корни.

Итак, докажем, что дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = a_0 + a_1\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$$

допускает факторизацию

$$\mathcal{L} = (\frac{d}{dx} - \psi_1)(\frac{d}{dx} - \psi_2)$$

на отрезке Ω длиной $b - a < \pi/h(\mathcal{L})$.

Из определения следует, что вещественные непрерывные функции ψ_1 и ψ_2 должны для любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ удовлетворять равенству

$$\left\{ \left(\frac{d}{dx} - \psi_1\right) \left(\frac{d}{dx} - \psi_2\right) \right\} \varphi =$$
$$(\psi_1\psi_2 - \psi_2')\varphi - (\psi_1 + \psi_2)\varphi' + \varphi'' = a_0\varphi + a_1\varphi' + \varphi''.$$

Используя это равенство, запишем систему

$$\begin{cases} \psi_1\psi_2 - \psi_2' = a_0\,, \\ -(\psi_1 + \psi_2) = a_1\,, \end{cases}$$

из которой следует, что

$$\psi_2' = -(a_0 + a_1\psi_2 + \psi_2^2)^2.$$

Легко видеть, что функция

$$\psi_2(x) = -a_1/2 + D\,\mathrm{tg}\{D((a+b)/2 - x),$$

где

$$D = \sqrt{a_0 - a_1^2/4},$$

является решением этого дифференциального уравнения, при этом

$$\psi_1(x) = -a_1/2 - D\,\mathrm{tg}\{D((a+b)/2 - x\}.$$

Из определения функций ψ_1 и ψ_2 следует, что дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ действительно допускает факторизацию на отрезке Ω. ■

Т е о р е м а 4.14. *Пусть на отрезке Ω дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ допускает факторизацию. Тогда функции $Z^{(0)}, Z^{(1)}, \ldots, Z^{(l-1)}$ на этом отрезке образуют систему Чебышева.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Напомним формулировку и доказательство обобщенной теоремы Ролля.

Пусть на отрезке $[\alpha, \beta]$ заданы непрерывная функция ψ и непрерывно дифференцируемая функция φ, удовлетворяющая краевым условиям $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$. Тогда существует такая точка $\alpha < \xi < \beta$, что

$$\varphi'(\xi) - \psi(\xi)\varphi(\xi) = 0.$$

Действительно, предположим, что функция $v = \varphi' - \psi\varphi$ не обращается в нуль на отрезке (α, β), тогда из равенства $\varphi(\alpha) = 0$ следует, что

$$\varphi(x) = \int_\alpha^x v(t) \exp\left\{\int_t^x \psi(\tau)d\tau\right\} dt.$$

Поэтому $\varphi(\beta) > 0$, если функция v положительна, и $\varphi(\beta) < 0$, если функция v отрицательна. Полученное противоречие доказывает обобщенную теорему Ролля.

2) Пусть

$$\mathcal{L} = \left(\frac{d}{dx} - \psi_1\right) \dots \left(\frac{d}{dx} - \psi_l\right)$$

– факторизация дифференциального оператора $\mathcal{L}$ на отрезке Ω. Зададим

$$\varphi = c_0 Z^{(0)} + \dots + c_l {}_{-1}\, Z^{(l-1)}.$$

Допустим, что $\varphi(x_0) = \dots = \varphi(x_{l-1}) = 0$, где $a < x_0 < \dots < x_{l-1} < b$. Докажем, что $c_0 = \dots = c_{l-1} = 0$.

Пусть

$$\varphi_l = \varphi,$$
$$\varphi_k = \left(\frac{d}{dx} - \psi_{k+1}\right) \dots \left(\frac{d}{dx} - \psi_l\right)\varphi, \quad l - 1 \geq k \geq 1.$$

Применяя обобщенную теорему Ролля к функциям $\varphi_{l-1}, \dots, \varphi_1$, делаем вывод о том, что на отрезке Ω существуют такие точки $\xi_{l-1}, \dots, \xi_1$, что $\varphi_{l-1}(\xi_{l-1}) = \dots = \varphi_1(\xi_1) = 0$. Из определения функции φ следует, что $\mathcal{L}\varphi = 0$, поэтому

$$\left(\frac{d}{dx} - \psi_1\right)\varphi_1 = 0.$$

Однако $\varphi_1(\xi_1) = 0$, поэтому $\varphi_1 = 0$ на отрезке Ω. Отметим, что

$$\left(\frac{d}{dx} - \psi_k\right)\varphi_k = \varphi_{k-1}$$

и $\varphi_k(\xi_k) = 0$. Поэтому из равенства $\varphi_{k-1} = 0$ на отрезке Ω следует равенство $\varphi_k = 0$ на отрезке Ω. Следовательно, $\varphi = \varphi_l = 0$ на отрезке Ω.

Итак, $c_0 Z^{(0)} + \dots + c_{l-1} Z^{(l-1)} = 0$ на отрезке Ω. Из линейной независимости функций $Z^{(0)}, \dots, Z^{(l-1)}$ следует, что $c_0 = \dots = c_{l-1} = 0$.

Это равенство говорит о том, что функции $Z^{(0)}, \ldots, Z^{(l-1)}$ образуют систему Чебышева на отрезке Ω.

3) Докажем дополнительно, что

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0, & \ldots & , x_{l-1} \\ Z^{(l-1)}, & \ldots & , Z^{(0)} \end{pmatrix} > 0$$

при $a < x_0 < \cdots < x_{l-1} < b$.

Стоящий слева определитель не обращается в нуль ни при каких указанных значениях переменных $x_0, \ldots, x_{l-1}$, поэтому его знак определяется по любому набору. Не умаляя общности, можно считать, что $a = 0$.

Из определения функции Z следует, что она представима в виде

$$Z(x) = \frac{1}{(l-1)!} x^{l-1} + Y(x) x^l,$$

где Y – аналитическая функция. Пусть

$$x_k(\varepsilon) = k\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon, \quad 0 \le k \le l-1,$$

тогда непосредственно из вычисления определителя имеем

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0(\varepsilon), & \ldots & , x_{l-1}(\varepsilon) \\ Z^{(l-1)}, & \ldots & , Z^{(0)} \end{pmatrix} =$$
$$\prod_{k=0}^{l-1} \frac{\varepsilon^{l-1-k}}{(l-1-k)!} \left\{ \Delta \begin{pmatrix} 0, 1, \ldots, l-1 \\ 1, x, \ldots, x^{l-1} \end{pmatrix} + o(\varepsilon) \right\}.$$

Однако

$$\Delta \begin{pmatrix} 0, 1, \ldots, l-1 \\ 1, x, \ldots, x^{l-1} \end{pmatrix} > 0,$$

поэтому при достаточно малых ε имеет место неравенство

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0(\varepsilon), & \ldots & , x_{l-1}(\varepsilon) \\ Z^{(l-1)}, & \ldots & , Z^{(0)} \end{pmatrix} > 0,$$

устанавливающее знак исходного определителя. ■

Пусть на отрезке Ω заданы точки $a < x_1 < \cdots < x_k < b$. Обозначим через $S_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_k)$ множество $\mathcal{L}$-сплайнов вида

$$u = \sum_{i=0}^{l-1} c_i Z^{(i)} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E(\cdot - x_i).$$

Очевидно, что функции

$$Z^{(0)}, \ldots, Z^{(l-1)}, \quad E(\cdot - x_1), \ldots, E(\cdot - x_k)$$

образуют базис пространства $S_{\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_k)$. Поэтому размерность этого пространства равна $l + k$.

Из теоремы 1.14 следует, что для любой функции $U_0 \in W_2^l(\Omega)$ существует и единствен $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайн $U^0 \in S_{\check{\mathcal{L}}\mathcal{L}}(x_1, \ldots, x_k)$, удовлетворяющий краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} U^{0(i)}(a) &= U_0^{(i)}(a) \\ U^{0(i)}(b) &= U_0^{(i)}(b) \end{aligned}\right\}, \quad 0 \le i \le l-1,$$

и интерполяционным условиям

$$U^0(x_i) = U_0(x_i), \quad 1 \le i \le k.$$

Фактически задача построения интерполяционного $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайна U^0 сводится к решению системы линейных уравнений порядка $l+k+l$. Эта система линейных уравнений возникает из:

l начальных условий,

k интерполяционных условий,

l конечных условий.

Заметим, что общее число условий $l+k+l$ согласуется с размерностью $2l + k$ пространства $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайнов $S_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x_1, \ldots, x_k)$.

Сложность решения описанной системы линейных уравнений зависит от выбора базиса в пространстве $S_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x_1, \ldots, x_k)$. Указанный выше базис неудобен тем, что он приводит к заполненным матрицам, требующим для своего обращения достаточно много операций. Поэтому в пространстве $S_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x_1, \ldots, x_k)$ естественно найти такой базис, который бы приводил к ленточным матрицам. Обращение ленточных матриц удобно тем, что число требуемых для этого обращения операций растет пропорционально длине ленты.

Искомый базис будет построен в предположении $b - a < \pi/h(\mathcal{L})$. Это предположение позволит нам строить указанный базис без ограничений на выбор узловых точек. Без этого предположения приходится узловые точки выбирать так, чтобы возникающие ниже системы линейных уравнений имели невырожденные матрицы.

Дадим одно полезное определение. Пусть точки $x_0 < x_1 < \cdots < x_l$ удовлетворяют неравенству $x_l - x_0 < \pi/h(\mathcal{L})$. Функция

$$B_{\mathcal{L}}(x; x_0, \ldots, x_l) = E(x - x_0) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i E(x - x_i),$$

где коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i Z^{(0)}(x_l - x_i) = Z^{(0)}(x_l - x_i), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{l} Z^{(l-1)}(x_l - x_i) = Z^{(l-1)}(x_l - x_i), \end{cases}$$

называется $B\mathcal{L}$-сплайном.

Очевидно, что $B\mathcal{L}$-сплайн $B_{\mathcal{L}}(x; x_0, \ldots, x_l)$ является $\mathcal{L}$-сплайном с носителем, сосредоточенным на отрезке $[x_0, x_l]$.

После этих предварительных построений опишем алгоритм решения задачи интерполяции $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайнами.

Пусть узловые точки $a < x_1 < \cdots < x_k < b$ доопределены точками $x_{1-2l} < x_{2-2l} < \cdots < x_0 = a$ и $b = x_{k+1} < x_{k-1+2l} < \cdots < x_{k+2l}$ так, что $x_{k+2l} - x_{1-2l} < \pi/h(\mathcal{L})$.

Т е о р е м а 5.14. *Функции*

$$B_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x; x_i, \ldots, x_{i+2l}), \quad 1 - 2l \le i \le k,$$

образуют базис пространства $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайнов $S_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x_1, \ldots, x_k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $E_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}$ – фундаментальное решение дифференциального оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$. Легко видеть, что функции

$$E_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(\cdot - x_i)|_{\Omega}, \quad 1 - 2l \le i \le k,$$

образуют базис пространства $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайнов $S_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x_1, \ldots, x_k)$. Непосредственно из определения $B\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайнов следует, что $B\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайны $B_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x; x_i, \ldots, x_{i+2l})$, где $1-2l \le i \le k$, выражаются через функции $E_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x - x_i)$, где $1 - 2l \le i \le k$, при помощи верхне-треугольной матрицы с единичной диагональю. Поэтому указанные $B\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайны образуют базис пространства $S_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x_1, \ldots, x_k)$. ■

Итак, пусть заданы начальные условия

$$\begin{aligned} U^{0(0)}(a) &= U_0^{(0)}(a), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U^{0(l-1)}(a) &= U_0^{(l-1)}(a), \end{aligned}$$

интерполяционные условия

$$\begin{aligned} U^0(x_1) &= U_0^{(0)}(x_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U^0(x_k) &= U_0^{(l-1)}(x_k), \end{aligned}$$

конечные условия

$$U^{0(0)}(b) = U_0^{(0)}(b),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$U^{0(l-1)}(b) = U_0^{(l-1)}(b).$$

Тогда интерполяционный $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайн U^0, удовлетворяющий этим условиям, единственным образом представим в виде

$$U^0(x) = \sum_{i=1-2l}^{k} \lambda_i B_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x; x_i, \dots, x_{i+2l}).$$

При этом коэффициенты $\lambda_{1-2l}, \dots, \lambda_k$ определяются из ленточной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1-2l}^{k} \lambda_i B^{(0)}_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(a; x_i, \dots, x_{i+2l}) = U_0^{(0)}(a), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1-2l}^{k} \lambda_i B^{(l-1)}_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(a; x_i, \dots, x_{i+2l}) = U_0^{(l-1)}(a), \\ \sum\limits_{i=1-2l}^{k} \lambda_i B_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x_1; x_i, \dots, x_{i+2l}) = U_0(x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1-2l}^{k} \lambda_i B_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(x_k; x_i, \dots, x_{i+2l}) = U_0(x_k), \\ \sum\limits_{i=1-2l}^{k} \lambda_i B^{(0)}_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(b; x_i, \dots, x_{i+2l}) = U_0^{(0)}(b), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1-2l}^{k} \lambda_i B^{(l-1)}_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}}(b; x_i, \dots, x_{i+2l}) = U_0^{(l-1)}(b). \end{cases}$$