Глава III

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

§15. Положительные распределения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченное открытое множество. Пробная функция $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ называется положительной, если $\varphi(x) \geq 0$ при всех $x \in \Omega$. Распределение $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется положительным, если $(\Lambda, \varphi) \geq 0$ для любой положительной пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Факт положительности распределения Λ будет выражаться с помощью неравенства $\Lambda \geq 0$. Фундаментальным примером положительного распределения служит дельта-функция δ_x, где $x \in \Omega$.

Обозначим через $\overset{+}{C}{}_0^\infty(\Omega)$ множество положительных пробных функций, а через $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$ – множество положительных распределений. Очевидно, что множество $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$ является сопряженной полугруппой к конусу $\overset{+}{C}{}_0^\infty(\Omega)$.

Т е о р е м а 1.15. *Линейная полугруппа $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$ является конусом в пространстве распределений нулевого порядка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Lambda \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$ и $-\Lambda \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$. Докажем, что $\Lambda = 0$.

Пусть $\varphi \in \overset{+}{C}{}_0^\infty(\Omega)$. Тогда из неравенств $(\Lambda, \varphi) \geq 0$ и $(-\Lambda, \varphi) \geq 0$ следует, что $(\Lambda, \varphi) = 0$.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, а пробная функция $\psi \in \overset{+}{C}{}_0^\infty(\Omega)$ равна 1 на множестве $\operatorname{supp}\varphi$. Тогда

$$-\|\varphi\|_{C^0(\mathrm{Cl}\,\Omega)}\psi \leq \varphi \leq \|\varphi\|_{C^0(\mathrm{Cl}\,\Omega)}\psi,$$

поэтому

$$-\|\varphi\|_{C^0(\mathrm{Cl}\,\Omega)}(\Lambda, \psi) \leq (\Lambda, \varphi) \leq \|\varphi\|_{C^0(\mathrm{Cl}\,\Omega)}(\Lambda, \psi),$$

откуда следует, что

$$|(\Lambda,\varphi)| \le (\Lambda,\psi)\|\varphi\|_{C^0(\mathrm{Cl}\,\Omega)}.$$

Поскольку $(\Lambda,\psi)=0$, то $(\Lambda,\varphi)=0$. Из произвольности φ следует, что $\Lambda=0$, поэтому линейная полугруппа $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$ является конусом.

Напомним, что распределение $\Lambda\in\mathcal{D}'(\Omega)$ имеет нулевой порядок, если для любого открытого подмножества $\omega \subset\subset \Omega$ существует такая постоянная μ, что

$$|(\Lambda,\varphi)| \le \mu\|\varphi\|_{C^0(\mathrm{Cl}\,\omega)}$$

при всех $\varphi\in C_0^\infty(\omega)$. Пусть $\omega \subset\subset \Omega$ и пробная функция $\psi\in \overset{+}{C}{}_0^\infty(\Omega)$ равна 1 на множестве $\mathrm{Cl}\,\omega$. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(\omega)$. Тогда из доказанного выше неравенства следует, что

$$|(\Lambda,\varphi)| \le (\Lambda,\psi)\|\varphi\|_{C_0(\mathrm{Cl}\,\omega)},$$

поэтому распределение Λ имеет нулевой порядок. ■

С л е д с т в и е. *Для любого положительного распределения Λ существует и единственна такая борелевская мера μ_Λ, что*

$$(\Lambda,\varphi)=\int \varphi d\mu_\Lambda \tag{1.15}$$

при всех $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.

Действительно, положительное распределение Λ имеет нулевой порядок. Поэтому оно как линейный непрерывный функционал может быть продолжено с пространства пробных функций $C_0^\infty(\Omega)$ на пространство $C_0^0(\Omega)$ непрерывных функций с компактным носителем. Из теоремы [22] о представлении положительного функционала на $C_0^0(\Omega)$ следует существование меры μ_Λ, единственность этой меры следует из того, что подпространство $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в пространстве $C_0^0(\Omega)$.

С л е д с т в и е. *Пусть положительное распределение $\Lambda\in\overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$ имеет конечный носитель $\operatorname{supp}\Lambda=\{x_1,\dots,x_k\}$, тогда*

$$\Lambda=\mu_\Lambda\{x_1\}\delta_{x_1}+\dots+\mu_\Lambda\{x_k\}\delta_{x_k}.$$

Более детально роль положительных распределений с конечными носителями раскрывается в следующей теореме и следствии к ней.

Т е о р е м а 2.15. *Семейство дельта-функций δ_x, где $x\in\Omega$, является системой образующих конуса $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\Lambda \in \overset{+}{\mathcal{D}}'(\Omega)$. Требуется построить такую последовательность $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ положительных распределений с конечными носителями, что

$$\Lambda = \lim_{k\to\infty} \Lambda_k$$

в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Пусть t – целочисленный вектор. Введем в рассмотрение ячейку

$$\Delta_t(k) = \left[\frac{t_1}{k}, \frac{t_1+1}{k}\right) \times \cdots \times \left[\frac{t_n}{k}, \frac{t_n+1}{k}\right)$$

и зададим $F_t(k) = \operatorname{supp}\Lambda \cap \Delta_t(k)$. Обозначим через $T(k)$ множество таких целочисленных векторов t, что $F_t(k) \neq \varnothing$ и $F_t(k) \subset \Omega$. Выберем при $t \in T(k)$ в множестве $F_t(k)$ точку $x_t(k)$.

Докажем, что распределения

$$\Lambda_k = \sum_{t\in T(k)} \mu_\Lambda\{F_t(k)\}\delta_{x_t(k)}$$

образуют искомую последовательность.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Зададимся таким компактным подмножеством $A \subset \Omega$, что носитель $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в A вместе с некоторой окрестностью. В таком случае для достаточно больших k имеет место равенство

$$(\Lambda_k, \varphi) = \sum_{\{t\in T(k):\, x_t(k)\in A\}} \varphi[x_t(k)]\mu_\Lambda\{F_t(k)\}.$$

Однако $\mu_\Lambda\{\Omega\setminus \operatorname{supp}\Lambda\} = 0$, поэтому

$$(\Lambda, \varphi) = \int \varphi d\mu_\Lambda = \int\limits_{\operatorname{supp}\Lambda\cap A} \varphi d\mu_\Lambda$$

Отсюда следует, что для достаточно больших k имеет место

$$(\Lambda, \varphi) = \sum_{\{t\in T(k):\, x_t(k)\in A\}} \int\limits_{F_t(k)} \varphi d\mu_\Lambda.$$

Теперь предел

$$(\Lambda, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (\Lambda_k, \varphi)$$

следует из неравенства

$$\mu_\Lambda\{\bigcup_{\{t\in T(k):x_t(k)\in A\}} F_t(k)\}\le\mu_\Lambda\{A\}$$

и равномерной непрерывности функции φ. ■

С л е д с т в и е. *Для любого положительного распределения* $\Lambda\in\overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$ *существует такая последовательность* $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots$ *положительных распределений с конечными носителями, что имеют место включение*

$$\operatorname{supp}\Lambda_k\subset\operatorname{supp}\Lambda,$$

неравенство

$$\mu_{\Lambda_k}\{\Omega\}\le\mu_\Lambda\{\Omega\}$$

и предел

$$\Lambda=\lim_{k\to\infty}\Lambda_k$$

в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Т е о р е м а 3.15. *Пусть последовательность положительных распределений* $\Lambda_1,\Lambda_2\ldots$ *сходится к положительному распределению* Λ_0 *в пространстве* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *а* $\omega\subset\Omega$ – *такая область, что* $\mu_\Lambda\{\operatorname{Fr}\omega\}=0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\operatorname{Cl}\omega} f d\mu_{\Lambda_0}=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\operatorname{Cl}\omega} f d\mu_{\Lambda_k}$$

для любой функции $f\in C^\infty(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $r>0$. Введем в рассмотрение открытое множество

$$\omega(r)=\bigcup_{x\in\omega}\operatorname{Int}\mathbb{D}^n(x,r)$$

и компактное множество

$$K(r)=\omega\setminus\bigcup_{x\in\omega}\operatorname{Int}\mathbb{D}^n(x,r).$$

Очевидно, что $\omega(r')\supset\omega(r'')$, а $K(r')\subset K(r'')$ при $r'<r''$, при этом

$$\operatorname{Cl}\omega=\bigcap_{r>0}\omega(r),$$

$$\omega = \bigcup_{r>0} K(r).$$

Пусть $r_0 > 0$ – такая точка, что $\omega(r_0) \subset \Omega$. Очевидно, что функция $\mu_{\Lambda_k}\{\omega(r)\}$ убывает, а функция $\mu_{\Lambda_k}\{K(r)\}$ возрастает по r на отрезке $(0, r_0)$.

Поскольку возрастающая функция имеет не более чем счетное число точек разрыва, при каждом $p = 1, 2...$ существует точка

$$r_p \in \left(\frac{r_0}{p+1}, \frac{r_0}{p}\right),$$

служащая точкой непрерывности для функций $\mu_{\Lambda_k}\{\omega(r)\}$ и $\mu_{\Lambda_k}\{K(r)\}$ при всех $k = 0, 1, \ldots$.

Докажем, что $\mu_{\Lambda_k}\{\mathrm{Fr}\,\omega(r_p)\} = \mu_{\Lambda_k}\{\mathrm{Fr}\,K(r_p)\} = 0$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$, а $\delta > 0$ – такое достаточно малое число, что

$$\mu_{\Lambda_k}\{\omega(r_p + \delta)\} - \mu_{\Lambda_k}\{\omega(r_p - \delta)\} < \varepsilon.$$

Тогда

$$\mu_{\Lambda_k}\{\mathrm{Fr}\,\omega(r_p)\} \le \mu_{\Lambda_k}\{\omega(r_p + \delta)\backslash\omega(r_p - \delta)\} = \mu_{\Lambda_k}\{\omega(r_p + \delta)\} - \mu_{\Lambda_k}\{\omega(r_p - \delta)\} \le \varepsilon.$$

Поэтому $\mu_{\Lambda_k}\{Fr\omega(rp)\} = 0$. Равенство $\mu_{\Lambda_k}\{FrK(rp)\} = 0$ доказывается аналогично.

Зададим $\omega_p = \omega(r_p)$ и $K_p = K(r_p)$, где $p = 1, 2, \ldots$.

2) Рассмотрим случай $f = 1$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots$ суть такие последовательности пробных функций, что

$$\varphi_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \mathbb{R}^n\backslash\omega_p, \\ 1 & \text{при } x \in \mathrm{Cl}\,\omega; \end{cases}$$
$$\psi_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \mathbb{R}^n\backslash\omega, \\ 1 & \text{при } x \in K_p, \end{cases}$$

причем

$$0 \le \varphi_p \le 1,$$
$$0 \le \psi_p \le 1.$$

Тогда при всех $k = 0, 1, \ldots$ имеет место неравенство

$$(\Lambda_k, \psi_p) = \int \psi_d \mu_{\Lambda_k} \le \mu_{\Lambda_k}\{\mathrm{Cl}\,\omega\} \le \int \varphi_p d\mu_{\Lambda_k} = (\Lambda_k, \varphi_p).$$

Однако

$$(\Lambda_0,\varphi_p)-(\Lambda_0,\psi_p)=\int(\varphi_p-\psi_p)d\mu_{\Lambda_0}=\int\limits_{\omega_p\setminus K_p}(\varphi_p-\psi_p)d\mu_{\Lambda_0}\le\mu_{\Lambda_0}\{\omega_p\setminus K_p\},$$

при этом

$$\operatorname{Fr}\omega=\bigcap_{p=1}^{\infty}(\omega_p\setminus K_p),$$

поэтому

$$\lim_{p\to\infty}\mu_{\Lambda_0}\{\omega_p\setminus K_p\}=\mu_{\Lambda_0}\{\operatorname{Fr}\omega\}=0.$$

Пусть $\varepsilon>0$. Подберем p так, что

$$(\Lambda_0,\varphi_p)-(\Lambda_0,\psi_p)\le\varepsilon/4.$$

Далее подберем k_p так, что

$$\begin{aligned}|(\Lambda_k,\varphi_p)-(\Lambda_0,\varphi_p)|&\le\varepsilon/4,\\ |(\Lambda_k,\psi_p)-(\Lambda_0,\psi_p)|&\le\varepsilon/4\end{aligned}$$

при всех $k\ge k_p$. Тогда

$$|\mu_{\Lambda_0}\{\operatorname{Cl}\omega\}-\mu_{\Lambda_k}\{\operatorname{Cl}\omega\}|\le\varepsilon$$

при всех $k\ge k_p$, поэтому

$$\int\limits_{\operatorname{Cl}\omega}d\mu_{\Lambda_0}=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\operatorname{Cl}\omega}1d\mu_{\Lambda_k}.$$

3) Пусть теперь $f\in C^\infty(\Omega)$. Зададим

$$M=\|f\|_{C^0(\operatorname{Cl}\omega_1)}.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{\operatorname{Cl}\omega}fd\mu_{\Lambda_k}-\int\limits_{\operatorname{Cl}\omega}fd\mu_{\Lambda_0}\right|=$$

$$\left|\int\limits_{\omega_p}f\varphi_p\,d\mu_{\Lambda_k}-\int\limits_{\omega_p}f\varphi_p d\mu_{\Lambda_0}-\int\limits_{\omega_p\setminus\operatorname{Cl}\omega}f\varphi_p\,d\mu_{\Lambda_k}+\int\limits_{\omega_p\setminus\operatorname{Cl}\omega}f\varphi_p d\mu_{\Lambda_0}\right|\le$$

$$\left|\int\limits_{\Omega} f\varphi_p\, d\mu_{\Lambda_k} - \int\limits_{\Omega} f\varphi_p\, d\mu_{\Lambda_0}\right| + M\,\mu_{\Lambda_k}\{\omega_p \setminus \mathrm{Cl}\,\omega\} + M\,\mu_{\Lambda_0}\{\mathrm{Cl}\,\omega_p \setminus \omega\} \le$$

$$|(\Lambda_k, f\varphi_p) - (\Lambda_0, f\varphi_p)| + M\,\mu_{\Lambda_k}\{\omega_p \setminus K_p\} + M\,\mu_{\Lambda_0}\{\omega_p \setminus K_p\}.$$

Поскольку

$$\mu_{\Lambda_0}\{\mathrm{Fr}\,\omega\} = 0$$

и

$$\mathrm{Fr}\,\omega = \bigcap_{p=1}^{\infty} (\omega_p \setminus K_p),$$

существует такое p, что

$$\mu_{\Lambda_0}\{\omega_p \setminus K_p\} \le \varepsilon/4.$$

Фиксируем это p. Поскольку

$$\mathrm{Fr}(\omega_p \setminus K_p) = Fr\omega_p \cup \mathrm{Fr}\,K_p,$$

имеет место равенство

$$\mu_{\Lambda_k}\{\mathrm{Fr}(\omega_p \setminus K_p)\} = 0$$

при всех $k = 0, 1, \ldots$. Поэтому из п. 2) следует, что

$$\mu_{\Lambda_0}\{\omega_p \setminus K_p\} = \lim_{k \to \infty} \mu_{\Lambda_k}\{\omega_p \setminus K_p\}.$$

Отсюда следует существование такого k_1, что

$$M\,\mu_{\Lambda_k}\{\omega_p \setminus K_p\} \le \varepsilon/3$$

при $k \ge k_1$. Из включения $f\varphi_p \in C_0^{\infty}(\Omega)$ следует существование такого k_2, что

$$|(\Lambda_k, \varphi_p f) - (\Lambda_0, \varphi_p f)| \le \varepsilon/3$$

при всех $k \ge k_2$, поэтому

$$\left|\int\limits_{\mathrm{Cl}\,\omega} f\, d\mu_{\Lambda_k} - \int\limits_{\mathrm{Cl}\,\omega} f\, d\mu_{\Lambda_0}\right| \le \varepsilon$$

при всех $k \ge \max\{k_1, k_2\}$. ■

З а м е ч а н и е. Доказанные теоремы достаточно элементарны и имеются во многих работах, например в [35–37].

Пусть $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ – положительное распределение с компактным носителем. Тогда при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет место равенство

$$(\Lambda, \varphi) = \int \varphi d\mu_\Lambda,$$

при этом носитель борелевской меры μ_Λ совпадает с носителем распределения Λ. Из этого равенства следует, что преобразование Фурье $\mathcal{F}$ распределения Λ представимо в виде

$$\mathcal{F}\Lambda(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,\xi)} d\mu_\Lambda(x).$$

Очевидно, что

$$\|\mathcal{F}\Lambda\|_{C^0(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)} \le (2\pi)^{-n/2} \mu_\Lambda\{\mathbb{R}^n\}.$$

Однако $\mu_\Lambda\{\mathbb{R}^n\} < \infty$, поэтому

$$\int |\mathcal{F}\Lambda(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{-n/2-s} d\xi < \infty$$

для любого $s > 0$. Это говорит о том, что для любого $s > 0$ распределение Λ принадлежит пространству $H_2^{-n/2-s}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть теперь $\Lambda \in \overset{+}{\mathcal{D}}'(\Omega)$ и $\omega \subset\subset \Omega$. Будем через Λ^ω обозначать распределение, определяемое по правилу

$$(\Lambda^\omega, \varphi) = \int_\omega \varphi d\mu_\Lambda,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, что распределение $\Lambda^\omega \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ положительно и имеет компактный носитель $\operatorname{supp}\Lambda^\omega \subset \mathrm{Cl}\,\omega$.

Т е о р е м а 4.15. *Для любого $s > 0$ имеет место вложение*

$$\overset{+}{\mathcal{D}}'(\Omega) \subset H_2^{-n/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Предположим что $\Lambda \in \overset{+}{\mathcal{D}}'(\Omega)$. Проверим, что $\Lambda \in H_2^{-n/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}}$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\omega \subset\subset \Omega$ – такая окрестность, что $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathrm{Cl}\,\omega$, тогда

$$\varphi\Lambda = \varphi\Lambda^\omega.$$

Распределение Λ^ω положительно и имеет компактный носитель, поэтому его преобразование Фурье имеет вид

$$\mathcal{F}\Lambda^\omega(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i(x,\xi)} d\mu_\Lambda\omega(x).$$

Отсюда

$$\|\mathcal{F}\Lambda^\omega\|_{C(\mathbb{R}^n)} \le (2\pi)^{-n/2}\mu_\Lambda\{\mathrm{Cl}\,\omega\}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\|\Lambda^\omega\|_{H_2^{-n/2-s}(\mathbb{R}^n)} = \int |\mathcal{F}\Lambda^\omega(\xi)|^2(1+\|\xi\|^2)^{-n/2-s}d\xi \le$$
$$(2\pi)^{-n}\mu_\Lambda\{\mathrm{Cl}\,\omega\}^2\int(1+\|\xi\|^2)^{-n/2-s}d\xi < \infty.$$

Поэтому $\Lambda^\omega \in H_2^{-n/2-s}(\mathbb{R}^n)$, отсюда $\varphi\Lambda \in H_2^{-n/2-s}(\mathbb{R}^n)$, поэтому по определению $\Lambda \in H_2^{-n/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}}$.

2) Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$ и

$$\Lambda_0 = \lim_{k\to\infty}\Lambda_k$$

в пространстве $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$.

Зададимся такой областью $\omega \subset\subset \Omega$, что $\mu_{\Lambda_0}\{\mathrm{Fr}\,\omega\} = 0$. Докажем, что имеет место предел

$$\mathcal{F}\Lambda_0 = \lim_{k\to\infty}\mathcal{F}\Lambda_k \tag{2.15}$$

в пространстве $C(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$.

Предположим противное. Тогда для некоторых $\varepsilon > 0$ и $r > 0$ в шаре $r\mathbb{D}^n$ существует такая последовательность точек $\xi_1, \xi_2, \dots$, что

$$\xi_0 = \lim_{k\to\infty}\xi_k$$

для некоторой точки $\xi_0 \in r\mathbb{D}^n$, однако

$$|\mathcal{F}\Lambda_0^\omega(\xi_k) - \mathcal{F}\Lambda_k^\omega(\xi_k)| \ge \varepsilon$$

при всех $k = 1, 2, \dots$. Для того чтобы получть противоречие, рассмотрим неравенство

$$(2\pi)^{n/2}|\mathcal{F}\Lambda_0^\omega(\xi_k) - \mathcal{F}\Lambda_k^\omega(\xi_k)| \le$$
$$\left|\int_{\mathrm{Cl}\,\omega} e^{-i(x,\xi_k)}d\mu_{\Lambda_0}(x) - \int_{\mathrm{Cl}\,\omega} e^{-i(x,\xi_0)}d\mu_{\Lambda_0}(x)\right| +$$
$$\left|\int_{\mathrm{Cl}\,\omega} e^{-i(x,\xi_0)}d\mu_{\Lambda_0}(x) - \int_{\mathrm{Cl}\,\omega} e^{-i(x,\xi_0)}d\mu_{\Lambda_k}(x)\right| +$$

$$\left| \int\limits_{\mathrm{Cl}\,\omega} e^{-i(x,\xi_0)} d\mu_{\Lambda_k}(x) - \int\limits_{\mathrm{Cl}\,\omega} e^{-i(x,\xi_k)} d\mu_{\Lambda_k}(x) \right|$$

и докажем, что каждое из стоящих справа слагаемых S_k^1, S_k^2, S_k^3 стремится к нулю.

Действительно, из теоремы 3.15 следует

$$\mu_{\Lambda_0}\{\mathrm{Cl}\,\omega\} = \lim_{k\to\infty} \mu_{\Lambda_k}\{\mathrm{Cl}\,\omega\},$$

поэтому существует такая постоянная M, что

$$\mu_{\Lambda_k}\{\mathrm{Cl}\,\omega\} \le M$$

при всех $k = 0, 1, \ldots$. Из этого неравенства следует, что

$$S_k^3 \le M \sup_{x\in\mathrm{Cl}\,\omega} |e^{-i(x,\xi_0)} - e^{-i(x,\xi_k)}|$$

при всех $k = 0, 1, \ldots$. Однако

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathrm{Cl}\,\omega} |e^{-i(x,\xi_k)} - e^{-i(x,\xi_0)}| = \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathrm{Cl}\,\omega} |1 - e^{-i(x,\xi_0-\xi_k)}|.$$

Поэтому первое и третье слагаемые стремятся к нулю. Применяя теорему 3.15 к функции $f(x) = e^{-i(x,\xi_0)}$, доказываем стремление к нулю второго слагаемого. Полученное противоречие доказывает предел (2.15).

3) Докажем теперь, что

$$\Lambda_0 = \lim_{k\to\infty} \Lambda_k$$

в пространстве $H_2^{-n/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}}$. Для этого достаточно доказать, что

$$\Lambda_0^\omega = \lim_{k\to\infty} \Lambda_k^\omega$$

в пространстве $H_2^{-n/2-s}(\mathbb{R}^n)$.

Зададимся $\varepsilon > 0$ и подберем $r > 0$ так, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus r\mathbb{D}^n} (1 + \|\xi\|^2)^{-n/2-s} d\xi \le (rM)^{-2} \frac{\varepsilon^2}{2},$$

где постоянная M определена выше. Далее подберем k_0 так, что

$$\int\limits_{r\mathbb{D}^n} |\mathcal{F}\Lambda_0^\omega(\xi) - \mathcal{F}\Lambda_k^\omega(\xi)|^2 d\xi \le \frac{\varepsilon^2}{2}$$

при всех $k \geq k_0$. Тогда

$$\|\Lambda_0^\omega - \Lambda_k^\omega\|_{H_2^{-n/2-s}(\mathbb{R}^n)} =$$

$$\int |\mathcal{F}\Lambda_0^\omega(\xi) - \mathcal{F}\Lambda_k^\omega(\xi)|^2 (1+\|\xi\|^2)^{-n/2-s} d\xi \leq \int\limits_{r\mathbb{D}^n} |\mathcal{F}\Lambda_0^\omega(\xi) - \mathcal{F}\Lambda_k^\omega(\xi)|^2 d\xi +$$

$$(2\pi)^{-n}(\mu_{\Lambda_0}\{\mathrm{Cl}\,\omega\} + \mu_{\Lambda_k}\{\mathrm{Cl}\,\omega\}) \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus r\mathbb{D}^n} (1+\|\xi\|^2)^{-n/2-s} d\xi \leq \varepsilon^2,$$

поэтому

$$\|\Lambda_0^\omega - \Lambda_k^\omega\|_{H_2^{-n/2-s}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$$

при всех $k \geq k_0$. ■

§16. Дифференциальные неравенства в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$

Пусть

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha \partial^\alpha$$

– эллиптический дифференциальный оператор порядка l с постоянными вещественными коэффициентами. Фундаментальное решение дифференциального оператора $\mathcal{L}$ будем обозначать через E.

Будем говорить, что распределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству $\mathcal{L}u \geq 0$, если распределение $\Lambda = \mathcal{L}u$ положительно. Часто для краткости речи распределение u, удовлетворяющее дифференциальному неравенству $\mathcal{L}u \geq 0$, будет называться $\mathcal{L}$-положительным распределением.

Уравнение $\mathcal{L}u = \Lambda$ имеет решение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ для любой правой части $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Доказательство этого факта имеется, например, в работе [23]. Поэтому для любого положительного распределения Λ существует такое $\mathcal{L}$-положительное распределение u, что $\mathcal{L}u = \Lambda$.

Очевидно, что в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$ множество $\mathcal{L}$-положительных распределений является замкнутой линейной полугруппой. Обозначим эту линейную полугруппу через $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$.

Т е о р е м а 1.16. *Для любого $\mathcal{L}$-положительного распределения $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$ и для любой области $\omega \subset\subset \Omega$ существует такая функция $v \in C^\infty(\omega)$, что $\mathcal{L}v = 0$ и в области ω распределение u представимо в виде*

$$u(x) = v(x) + \int\limits_\omega E(x-y) d\mu_\Lambda(y), \tag{1.16}$$

где $\Lambda = \mathcal{L}u$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что

$$\mathcal{L}[u|_\omega - (E * \Lambda^\omega)|_\omega] = (\mathcal{L}u)|_\omega - (\mathcal{L}E * \Lambda^\omega)|_\omega = \Lambda|_\omega - \Lambda^\omega|_\omega = 0,$$

следовательно, существует такая функция $v \in C^\infty(\omega)$, что в области ω имеет место представление

$$u|_\omega = v + (E * \Lambda^\omega)|_\omega . \tag{2.16}$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что свертка $E * \Lambda^\omega$ представляется функцией

$$\int\limits_\omega E(\cdot - y)d\mu_\Lambda(y) \in L_1(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}. \tag{3.16}$$

Действительно, пусть $\omega_0 \Subset \mathbb{R}^n$. Тогда из неравенства $\mu_\Lambda\{\omega\} < \infty$ и включения $E \in L_1(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$ следует неравенство

$$\int\limits_{\omega_0\times\omega} |E(x-y)|dxd\mu_\Lambda(y) = \int\limits_\omega \left\{ \int\limits_{\omega_0} |E(x-y)|dx \right\} d\mu_\Lambda(y) \le$$

$$\int\limits_\omega \left\{ \int\limits_{\omega_0-\omega} |E(x)|dx \right\} d\mu_\Lambda(y) = \mu_\Lambda\{\omega\} \int\limits_{\omega_0-\omega} |E(x)|dx < \infty,$$

поэтому из теоремы Фуббини следует включение (3.16).

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, тогда

$$\left(\int\limits_\omega E(\cdot - y)d\mu_\Lambda(y), \varphi \right) = \int \left\{ \int\limits_\omega E(x-y)d\mu_\Lambda(y) \right\} \varphi(x)dx =$$

$$\int\limits_\omega \left\{ \int E(x-y)\varphi(x)dx \right\} d\mu_\Lambda(y) =$$

$$\int\limits_\omega \left\{ \int E(-y-x)\varphi(-x)dx \right\} d\mu_\Lambda(y) =$$

$$\int\limits_\omega \left\{ \int E(-y-x)\check{\varphi}(x)dx \right\} d\mu_\Lambda(y) = \int\limits_\omega (E * \check{\varphi})(-y)d\mu_\Lambda(y) =$$

$$(\Lambda^\omega, (E * \check{\varphi})(0 - \cdot)) = [\Lambda^\omega * (E * \check{\varphi})](0) =$$

$$[(E * \Lambda^\omega) * \check{\varphi}](0) = (E * \Lambda^\omega, \varphi),$$

где $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Равенство

$$E * \Lambda^{\omega} = \int\limits_{\omega} E(\cdot - y) d\mu_{\Lambda}(y)$$

доказано. ■

З а м е ч а н и е. При $n = 2$ и $\mathcal{L} = \Delta$ представление (1.16) является классическим представлением Рисса субгармонических функций [4].

З а м е ч а н и е. При $\mu_{\Lambda}\{\Omega\} < \infty$ теорема 1.16 может быть несколько усилена. В этом случае существует такая функция $v \in C^{\infty}(\Omega)$, что $\mathcal{L}v = 0$ и во всей области Ω имеет место представление

$$u(x) = v(x) + \int\limits_{\Omega} E(x - y) d\mu_{\Lambda}(y).$$

Из теоремы 1.16 следует, что имеет место включение

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset L_1(\Omega)^{\mathrm{loc}}.$$

Поэтому в дальнейшем $\mathcal{L}$-положительные распределения будут называться $\mathcal{L}$-положительными функциями.

Т е о р е м а 2.16. *Для любого $s > 0$ имеет место вложение*

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subsetneq H_2^{l-n/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Докажем включение

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset H_2^{l-n/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}}.$$

Пусть $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$ и $\omega \subseteq \Omega$. Из теоремы 1.16 следует представление

$$u|_{\omega} = v + (E * \Lambda^{\omega})|_{\omega},$$

где $v \in C^{\infty}(\omega)$. Однако

$$\Lambda^{\omega} \in H_2^{-n/2-s}(\mathbb{R}^n),$$

поэтому из эллиптичности оператора $\mathcal{L}$ следует включение

$$E * \Lambda^{\omega} \in H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}},$$

отсюда следует включение

$$u \in H_2^{l-n/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}}.$$

2) Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$ и

$$\Lambda_0 = \lim_{k\to\infty} \Lambda_k$$

в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Зададимся такой окрестностью $\omega \subset\subset \Omega$, что $\mu_{\Lambda_0}\{\mathrm{Fr}\,\omega\} = 0$. Докажем, что

$$E * \Lambda_0^\omega = \lim_{k\to\infty} E * \Lambda_k^\omega$$

в пространстве $H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$.

С этой целью для заданной области $\omega_0 \subset\subset \mathbb{R}^n$ построим такую последовательность функций $V_0, V_1, \dots \in H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)$, что

$$V_k|_{\omega_0} = (E * \Lambda_k^\omega)|_{\omega_0}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и $V_0 = \lim\limits_{k\to\infty} V_k$ в пространстве $H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть функция $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ равна 1 в некоторой окрестности множества $\mathrm{Cl}(\omega_0 - \omega)$. Зададим $F = \psi E$. Отметим, что

$$(E * \Lambda^\omega)|_{\omega_0} = (F * \Lambda^\omega)|_{\omega_0}$$

для любого распределения $\Lambda \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$. При этом из включения

$$E \in H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$$

следует, что $F \in H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)$. Докажем, что имеет место включение

$$F * \Lambda^\omega \in H_2^{l-n/-s}(\mathbb{R}^n).$$

Действительно,

$$\int |\mathcal{F}(F * \Lambda^\omega)(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{l-n/2-s} d\xi =$$

$$\int |\mathcal{F}\Lambda^\omega(\xi)|^2 |\mathcal{F}F(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{l-n/2-s} d\xi \le$$

$$(2\pi)^{-n} \mu_\Lambda\{\mathrm{Cl}\,\omega\} \|\mathcal{F}\Lambda^\omega\|^2_{C^0(\mathrm{Cl}\,\mathbb{R}^n)} \|F\|^2_{H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Зададим $V_k = F * \Lambda_k^\omega$, $k = 0, 1, \dots$, и докажем, что $V_0 = \lim\limits_{k\to\infty} V_k$ в пространстве $H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)$.

Прежде всего отметим, что в теореме 4.1 было доказано равенство

$$\mathcal{F}\Lambda_0^\omega = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}\Lambda_k^\omega$$

в пространстве $C(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Подберем такое M, что

$$\mu_{\Lambda_k}\{\mathrm{Cl}\,\omega\} \le M$$

при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Далее подберем такое $r > 0$, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus r\mathbb{D}^n} |\mathcal{F}F(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{l-n/2-s} d\xi \le \frac{1}{2}\varepsilon^2/M^2.$$

И наконец, подберем такое k_0, что

$$\|\mathcal{F}\Lambda_k^\omega - \mathcal{F}\Lambda_k^\omega\|^2_{C(r\mathbb{D}^n)} \le \frac{1}{2}\varepsilon^2/\|F\|^2_{H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)}$$

при всех $k \ge k_0$. Тогда

$$\|V_0 - V_k\|^2_{H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)} = \|F * \Lambda_0^\omega - F * \Lambda_k^\omega\|^2_{H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)} =$$

$$\int |\mathcal{F}F(\xi)|^2 |\mathcal{F}\Lambda_0^\omega(\xi) - \mathcal{F}\Lambda_k^\omega(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{l-n/2-s} d\xi \le$$

$$\|\mathcal{F}\Lambda_0^\omega - \mathcal{F}\Lambda_k^\omega\|^2_{C(r\mathbb{D}^n)} \|F\|^2_{H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)} +$$

$$\mu_{\Lambda_k}\{\mathrm{Cl}\,\omega\}^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus r\mathbb{D}^n} |\mathcal{F}F(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{l-n/2-s} d\xi \le \varepsilon^2$$

при всех $k \ge k_0$.

3) Докажем вложение

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset H_2^{l-n/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}}.$$

Пусть распределения $u_1, u_2, \cdots \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$ сходятся к распределению $u_0 \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$ в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Требуется доказать, что $u_0 = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ в пространстве $H_2^{l-n/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}}$. Для этого достаточно для заданной окрестности $\omega_0 \Subset \Omega$ построить такую последовательность функций $w_0, w_1, w_2, \cdots \in H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$, что

$$w_k|_{\omega_0} = u_k|_{\omega_0}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$w_0 = \lim\limits_{k\to\infty} w_k$ в пространстве $H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$.

Пусть $\Lambda_k = \mathcal{L}u_k$ при $k = 0, 1, \ldots$. Зададим $\omega \Subset \Omega$ так, что $\omega_0 \Subset \omega$ и $\mu_{\Lambda_0}\{\mathrm{Fr}\,\omega\} = 0$.

Из теоремы 1.15 следует представление

$$w_k|_\omega = v_k + (E * \Lambda_k^\omega)|_\omega,$$

где $v_k \in C^\infty(\omega)$ и $\mathcal{L}v_k = 0$. Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ равна 1 в некоторой окрестности $\mathrm{Cl}\,\omega_0$. Зададим

$$w_k = \varphi v_k + E * \Lambda_k^\omega,$$

считая, что функция φv_k продолжена нулем вне множества ω. Очевидно, что $w_k \in H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$ и $w_k|_{\omega_0} = u_k|_{\omega_0}$.

Однако из п. 2) следует, что

$$E * \Lambda_0^\omega = \lim_{k\to\infty} E * \Lambda_k^\omega$$

в пространстве $H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$, поэтому

$$v_0 = \lim_{k\to\infty} v_k$$

в пространстве $\mathcal{D}'(\omega)$. Однако из теоремы Стилтьеса-Витали следует, что последний предел имеет место в пространстве $C^\infty(\omega)$. Поэтому имеет место предел $w_0 = \lim\limits_{k\to\infty} w_k$ в пространстве $H_2^{l-n/2-s}(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$.

■

С л е д с т в и е. *При $l > n/2$ следует вложение*

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}},$$

при $l > n$ имеем вложение

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset C^{l-n-1}(\Omega).$$

Пусть в области Ω заданы точки $x_1, \ldots, x_k$. Напомним, что функция вида

$$u(x) = v(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i E(x - x_i),$$

где $v \in C^\infty(\Omega)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathcal{L}v = 0$, была названа $\mathcal{L}$-сплайном. Точки $x_1, \ldots, x_k$ были названы узловыми точками $\mathcal{L}$-сплайна u. Узловая точка x_i называется существенной, если $\lambda_i \neq 0$.

Очевидно, что $\mathcal{L}$-сплайн u является $\mathcal{L}$-положительной функцией тогда и только тогда, когда $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$.

Т е о р е м а 3.16. *Пусть* $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$. *Тогда в линейной полугруппе* $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$ *существует последовательность* $\mathcal{L}$*-положительных* $\mathcal{L}$*-сплайнов* $u_1, u_2, \ldots$ *такая, что*

$$u = \lim_{k \to \infty} u_k$$

в пространстве $L_1(\Omega)^{\mathrm{loc}}$, *при этом*

$$\operatorname{supp} \mathcal{L} u_k \subset \operatorname{supp} \mathcal{L} u \text{ и } \mu_{\mathcal{L} u_k}\{\Omega\} \leq \mu_{\mathcal{L} u}\{\Omega\}$$

при всех $k = 1, 2, \ldots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим

$$\omega(r) = \Omega \backslash \bigcup_{x \in \operatorname{Fr} \Omega} \mathbb{D}^n(x, r).$$

Пусть $r > 0$ столь мало, что $\omega(r) \neq \varnothing$.

Докажем, что множество $\omega(r)$ открыто. Для этого достаточно доказать, что множество

$$\tau(r) = \bigcup_{x \in \operatorname{Fr} \Omega} \mathbb{D}^n(x, r)$$

замкнуто. Пусть последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$, принадлежит множеству $\tau(r)$ и $x_0 = \lim\limits_{k \to \infty} x_k$. Тогда существуют такие точки $y_1, y_2, \ldots$, лежащие на границе $\operatorname{Fr} \Omega$, что $\|y_k - x_k\| \leq r$. Не умаляя общности, можно считать, что

$$y_0 = \lim_{k \to \infty} y_k,$$

где $y_0 \in \operatorname{Fr} \Omega$. Из непрерывности нормы следует, что $\|y_0 - x_0\| \leq r$, поэтому множество $\tau(r)$ замкнуто.

Докажем, что множество $\Omega \backslash \omega(r)$ невозможно представить в виде $\Omega \backslash \omega(r) = F \cup K$, где множество $F \neq \varnothing$ замкнуто в Ω, а множество $K \neq \varnothing$ компактно и

$$F \cap K = \varnothing.$$

Действительно, допустим, что указанное представление существует. Пусть точки $x_0 \in \operatorname{Fr} \Omega$ и $y_0 \in K$ реализуют расстояние между $\operatorname{Fr} \Omega$ и K. Тогда $x_0 \neq y_0$ и открытый отрезок (x_0, y_0) принадлежит F. Из замкнутости множества F следует, что $y_0 \in F$, поэтому $F \cap K \neq \varnothing$. Полученное противоречие доказывает невозможность указанного представления.

Из теоремы 1.16 следует существование в области $\omega(r/2)$ такой функции $v \in C^\infty(\omega(r/2))$, что $\mathcal{L}v = 0$ и

$$u(x) = v(x) + \int\limits_{\omega(r/2)} E(x-y)d\mu_\Lambda(y),$$

где $\Lambda = \mathcal{L}u$.

Пусть t – целочисленный вектор. Зададим

$$F_t(k) = \omega(r/2) \cap \operatorname{supp}\Lambda \cap \Delta_t(k),$$

где

$$\Delta t(k) = \left[\frac{t_1}{k}, \frac{t_1+1}{k}\right) \times \cdots \times \left[\frac{t_n}{k}, \frac{t_n+1}{k}\right).$$

Пусть $T(k)$ – множество таких векторов t, что $F_t(k) \neq \varnothing$. Выберем при каждом $t \in T(k)$ точку $x_t(k) \in F_t(k)$. Положим

$$w_k(x) = \sum_{t\in T(k)} \mu_\Lambda\{F_t(k)\}E[x - x_t(k)],$$

$$w(x) = \int\limits_{\omega(r/2)} E(x-y)d\mu_\Lambda(y).$$

Докажем, что

$$w = \lim_{k\to\infty} w_k$$

в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$. Пусть $\omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\int_\omega |w(x) - w_k(x)|\,dx =$$

$$\int\limits_\omega \left| \sum_{t\in T(k)} \int\limits_{F_t(k)} \{E(x-y) - E(x-x_t(k)\}d\mu_\Lambda(y) \right| dx \leq$$

$$\int\limits_\omega \sum_{t\in T(k)} \int\limits_{F_t(k)} |E(x-y) - E(x-x_t(k))|d\mu_\Lambda(y)dx =$$

$$\sum_{t\in T(k)} \int\limits_{F_t(k)} \int\limits_\omega |E(x-y) - E(x-x_t(k))|dxd\mu_\Lambda(y) \leq$$

$$\mu_\Lambda\{\omega(r/2)\} \sup_{h\in(n/k)\mathbb{D}^n} \int\limits_{\omega-\omega} |E(x+h) - E(x)|dx.$$

Однако $\mu_\Lambda\{\omega(r/2)\} < \infty$, а из включения $E \in L_1(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$ следует

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{h\in(n/k)\mathbb{D}^n} \int\limits_{\omega-\omega} |E(x+h) - E(x)|dx = 0.$$

Таким образом, в пространстве $L_1(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$ доказано равенство $w = \lim\limits_{k\to\infty} w_k$.

Поскольку множество $\Omega\backslash\omega(r)$ невозможно представить в виде $\Omega\backslash\omega(r) = F \cup K$, где множество $F \neq \varnothing$ замкнуто в Ω, а множество $K \neq \varnothing$ компактно и $F \cap K = \varnothing$, из аппроксимационной теоремы Рунге [23] следует существование таких функций $v_1, v_2, \ldots$ из пространства $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что $\mathcal{L}v_k = 0$ и $v = \lim\limits_{k\to\infty} v_k$ в пространстве $C^\infty(\omega(r/2))$.

Зададим $u_k = v_k + w_k$. Отметим, что $u_k \in L_1(\mathbb{R}^n)$, поскольку $v_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а $w_k \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Из доказанных выше пределов следует, что $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ в пространстве $L_1(\omega(r))$. При этом функция u_k является $\mathcal{L}$-положительным $\mathcal{L}$-сплайном, удовлетворяющим требуемым условиям

$$\operatorname{supp}\mathcal{L}u_k \subset \operatorname{supp}\mathcal{L}u \text{ и } \mu_{\mathcal{L}u_k}\{\Omega\} \le \mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\}$$

при всех $k = 1, 2, \ldots$. Завершая доказательство теоремы, построим для $\omega(2^{-k})$ такой $\mathcal{L}$-положительный $\mathcal{L}$-сплайн u_k, что

$$\|u - u_k\|_{L_1(\omega(2^{-k}))} \le 1/k,$$
$$\operatorname{supp}\mathcal{L}u_k \subset \operatorname{supp}\mathcal{L}u,$$
$$\mu_{\mathcal{L}u_k}\{\Omega\} \le \mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\},$$

при всех $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что

$$u = \lim_{k\to\infty} u_k$$

в пространстве $L_1(\Omega)^{\mathrm{loc}}$. ■

С л е д с т в и е. *При $l > n/2$ и $l > n$ из теоремы 3.16 вытекает, что $\mathcal{L}$-положительная функция u допускает $\mathcal{L}$-положительную $\mathcal{L}$-сплайн аппроксимацию в пространствах $L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}}$ и $C^{l-n-1}(\Omega)$ соответственно, причем узловые точки аппроксимирующих $\mathcal{L}$-сплайнов могут браться из носителя* $\operatorname{supp}\mathcal{L}u$. *Это означает, что в той области, где функция u удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}u = 0$, аппроксимирующие $\mathcal{L}$-сплайны удовлетворяют этому же уравнению.*

§17. *Дифференциальные неравенства в пространстве* $L_2(\Omega)$

Будем далее предполагать, что $l > n/2$. При этом предположении имеет место вложение $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}}$, позволяющее рассматривать дифференциальные неравенства в пространстве $L_2(\Omega)$. Действительно, включение $u \in L_2(\Omega)$ при предположении $\mathcal{L}u \geq 0$ ограничивает только рост $\mathcal{L}$-положительной функции u на границе $\operatorname{Fr}\Omega$ области Ω.

Зададим

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \mathcal{L}u = 0\},$$
$$V_{\mathcal{L}}(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \mathcal{L}u \geq 0\}.$$

Пусть

$$K_{\mathcal{L}}(\Omega) = V_{\mathcal{L}}(\Omega) \cap P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}.$$

Т е о р е м а 1.17. *В пространстве* $L_2(\Omega)$ *множество* $V_{\mathcal{L}}(\Omega)$ *является замкнутой линейной полугруппой, представимой в виде прямой суммы*

$$V_{\mathcal{L}}(\Omega) = P_{\mathcal{L}}(\Omega) \oplus K_{\mathcal{L}}(\Omega)$$

замкнутого пространства $P_{\mathcal{L}}(\Omega)$ *и замкнутого конуса* $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что множество $V_{\mathcal{L}}(\Omega)$ является линейной полугруппой в пространстве $L_2(\Omega)$.

Пусть последовательность функций $u_1, u_2, \ldots$ принадлежит множеству $V_{\mathcal{L}}(\Omega)$ и сходится к функции u в пространстве $L_2(\Omega)$. Пусть $\varphi \in \overset{+}{C}{}_0^{\infty}(\Omega)$. Тогда

$$(\mathcal{L}u_k, \varphi) = (u_k, \check{\mathcal{L}}\varphi)_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[k\to\infty]{} (u, \check{\mathcal{L}}\varphi)_{L_2(\Omega)} = (\mathcal{L}u, \varphi).$$

Однако $(\mathcal{L}u_k, \varphi) \geq 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, поэтому $(\mathcal{L}u, \varphi) \geq 0$. Отсюда следует, что $u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Поэтому множество $V_{\mathcal{L}}(\Omega)$ замкнуто в пространстве $L_2(\Omega)$. Замкнутость линейного пространства $P_{\mathcal{L}}(\Omega)$ очевидна. Замкнутость $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ следует из замкнутости $V_{\mathcal{L}}(\Omega)$.

Докажем равенство $P_{\mathcal{L}}(\Omega) = V_{\mathcal{L}}(\Omega) \cap (-V_{\mathcal{L}}(\Omega))$. Включение $P_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset V_{\mathcal{L}}(\Omega) \cap (-V_{\mathcal{L}}(\Omega))$ очевидно. Пусть $u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$ и $u \in -V_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Тогда $\mathcal{L}u \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$ и $-\mathcal{L}u \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega)$. Поэтому из теоремы 1.15 следует, что $\mathcal{L}u = 0$. Это равенство говорит о том, что $u \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Теперь представление $V_{\mathcal{L}}(\Omega) = P_{\mathcal{L}}(\Omega) \oplus K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ вытекает из определения множества $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$. ■

Докажем одну техническую теорему, которая будет играть существенную роль при дальнейшем изучении дифференциальных неравенств.

Пусть $W_2^l(\Omega)$ – пространство Соболева, а $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ – замыкание пространства пробных функций $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве Соболева $W_2^l(\Omega)$.

Т е о р е м а 2.17. *Пусть $u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$, а функция $V \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $V|_{\operatorname{supp}\mathcal{L}u} \geq 0$. Тогда функция V суммируема по мере $\mu_{\mathcal{L}u}$ и имеет место представление*

$$\int_\Omega V d\mu_{\mathcal{L}u} = (u, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)}. \tag{1.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства $l > n/2$ вытекает вложение $W_2^l(\Omega) \subset C^0(\mathrm{Cl}\,\Omega)$, поэтому из непрерывности функции V следует ее измеримость по Борелю.

Для доказательства равенства (1.17) рассмотрим два случая:

$$\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} < \infty \quad \text{и} \quad \mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} = \infty.$$

Отметим, что в первом случае положительность функции V на $\operatorname{supp}\mathcal{L}u$ может не предполагаться.

1) Пусть $\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} < \infty$. Зададимся такой последовательностью $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ пробных функций из пространства $C_0^\infty(\Omega)$, что

$$V = \lim_{k\to\infty} \varphi_k \tag{2.17}$$

в пространстве $W_2^l(\Omega)$. Из неравенства $l > n/2$ следует, что предел (2.17) имеет место в пространстве $C^0(\mathrm{Cl}\,\Omega)$. Однако

$$\int_\Omega \varphi_k d\mu_{\mathcal{L}u} = (\mathcal{L}u, \varphi_k) = (u, \check{\mathcal{L}}\varphi_k)_{L_2(\Omega)}.$$

Поэтому представление (1.17) вытекает из возможности предельного перехода под знаком интеграла.

2) Пусть $\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} = 0$. В работе [29] доказано существование такой последовательности $V_1, V_2, \ldots$ функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$, что

$$V = \lim_{k\to\infty} V_k \tag{3.17}$$

в пространстве $W_2^l(\Omega)$, причем для каждого $k = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство $|V_k| \leq |V|$ и существует такая окрестность $\Omega_k \subset\subset \Omega$, что $\operatorname{supp} V_k \subset \Omega_k$.

Поскольку $\mu_{\mathcal{L}u}\{V_k\} < \infty$ из п. 1) следует, что

$$\int_\Omega V_k d\mu_{\mathcal{L}u} = (u, \check{\mathcal{L}}V_k)_{L_2(\Omega)}.$$

Очевидно, что

$$(u, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} (u, \check{\mathcal{L}}V_k)_{L_2(\Omega)},$$

$$\int\limits_{\Omega} V_k d\mu_{\mathcal{L}u} = \int\limits_{\operatorname{supp}\mathcal{L}u} V_k d\mu_{\mathcal{L}u}.$$

Из неравенства $l > n/2$ следует, что предел (3.17) имеет место в пространстве $C^0(\mathrm{Cl}\,\Omega)$. Поэтому из теоремы Фату следует, что

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\mathcal{L}u} V\, d\mu_{\mathcal{L}u} \le (u, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)}.$$

Из неравенств $0 \le V_k(x) \le V(x)$ при $x \in \operatorname{supp}\mathcal{L}u$ следует, что

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\mathcal{L}u} V\, d\mu_{\mathcal{L}u} \ge \int\limits_{\operatorname{supp}\mathcal{L}u} V_k d\mu_{\mathcal{L}u},$$

поэтому

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\mathcal{L}u} V\, d\mu_{\mathcal{L}u} \ge (u, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)}.$$

Итак,

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\mathcal{L}u} V\, d\mu_{\mathcal{L}u} = (u, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)}.$$

Из очевидного равенства

$$\int\limits_{\Omega} V\, d\mu_{\mathcal{L}u} = \int\limits_{\operatorname{supp}\mathcal{L}u} V\, d\mu_{\mathcal{L}u}$$

следует представление (1.17). ■

З а м е ч а н и е. Представление, подобное (1.17), с использованием аналогичной техники было доказано в работе [38].

Введем в рассмотрение конус

$$\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega) = \{V \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega) : V \ge 0\}$$

положительных функций в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$.

Т е о р е м а 3.17. *Отображения*

$$\check{E}* : V_{\mathcal{L}}(\Omega)^* \longrightarrow \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega),$$

$$\check{\mathcal{L}} : \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega) \longrightarrow V_{\mathcal{L}}(\Omega)^*$$

взаимно обратны и непрерывны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что

$$\check{E} * u \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega) \text{ при } u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)^*,$$
$$\check{\mathcal{L}}V \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)^* \text{ при } V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega).$$

После этих проверок для доказательства теоремы достаточно будет воспользоваться теоремой 2.12.

1) Пусть $u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)^*$. Тогда $u \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}$, поэтому $\check{E} * u \in W_2^l(\Omega)$. Однако

$$(\check{E} * u)(x) = (E(\cdot - x), u)_{L_2(\Omega)},$$
$$E(\cdot - x)|_{\Omega} \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$$

при всех $x \in \Omega$. Поэтому $(\check{E} * u)(x) \geq 0$ и $\check{E} * u \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$.

2) Пусть $V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$. Тогда из теоремы 2.17 следует, что

$$(u, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} V d\mu_{\mathcal{L}u} \geq 0$$

при всех $u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Поэтому $\check{\mathcal{L}}V \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)^*$. ■

Отметим, что пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ может быть сделано гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(U, V)_{\mathcal{L}} = (\check{\mathcal{L}}U, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)}.$$

При этом топологическая структура остается неизменной. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)^*_{\mathcal{L}}$ сопряженную линейную полугруппу для конуса $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{L}}$.

Т е о р е м а 4.17. *Отображения*

$$\check{E} * : K_{\mathcal{L}}(\Omega) \longrightarrow \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)^*_{\mathcal{L}},$$
$$\check{\mathcal{L}} : \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)^*_{\mathcal{L}} \longrightarrow K_{\mathcal{L}}(\Omega)$$

взаимно обратны и непрерывны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что

$$\check{E} * u \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)^*_{\mathcal{L}} \text{ при } u \in K_{\mathcal{L}}(\Omega),$$
$$\check{\mathcal{L}}V \in K_{\mathcal{L}}(\Omega) \text{ при } V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)^*_{\mathcal{L}}.$$

1) Пусть $u \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Возьмем $V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)^*_{\mathcal{L}}$. Тогда из теоремы 2.17 следует, что

$$(\check{E} * u, V)_{\mathcal{L}} = (\check{\mathcal{L}}(\check{E} * u), \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = (u, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} V\, d\mu_{\mathcal{L}u} \geq 0,$$

поэтому $\check{E} * u \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)^*_{\mathcal{L}}$.

2) Пусть $V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)^*_{\mathcal{L}}$. Возьмем $\varphi \in \overset{+}{C}{}_0^\infty(\Omega)$, тогда

$$(\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}V, \varphi) = (\check{\mathcal{L}}V, \check{\mathcal{L}}\varphi)_{L_2(\Omega)} = (V, \varphi)_{\mathcal{L}} \geq 0.$$

Следовательно, $\check{\mathcal{L}}V \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Однако $\check{\mathcal{L}}V \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp$, поэтому $\check{\mathcal{L}}V \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$. ■

Пусть $S \subset \Omega$. Введем в рассмотрение конус

$$\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, S) = \{V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega) : V|_S = 0\}$$

положительных функций из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$, равных нулю на множестве S.

Т е о р е м а 5.17. *Пусть $u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Отображения*

$$\check{E}* : V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}^* \longrightarrow \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp} \mathcal{L}u),$$
$$\check{\mathcal{L}} : \overset{+}{W}{}_2(\Omega, \operatorname{supp} \mathcal{L}u) \longrightarrow V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}$$

взаимно обратны и непрерывны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что

$$\check{E} * v \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp} \mathcal{L}u) \text{ при } v \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}^*,$$
$$\check{\mathcal{L}}V \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}^* \text{ при } V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp} \mathcal{L}u).$$

1) Пусть $v \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}^*$. Тогда $v \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)^*$. Поэтому из теоремы 3.17 следует, что $\check{E} * v \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$. Пусть $V = \check{E} * v$. Докажем, что $V|_{\operatorname{supp} \mathcal{L}u} = 0$. Предположим, что $x_0 \in \operatorname{supp} \mathcal{L}u$ и $V(x_0) > 0$. Обозначим через $\omega \subset\subset \Omega$ такую окрестность точки x_0, что $V(x) \geq \varepsilon$ при $x \in \omega$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Пусть $\Lambda = \mathcal{L}u$. Очевидно, что

$$\Lambda - \Lambda^\omega|_\Omega \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'(\Omega).$$

Пусть $w = (\check{E} * \Lambda^\omega)|_\Omega$. Очевидно, что $\omega \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Однако

$$\mathcal{L}(u - w) = \Lambda - \Lambda^\omega|_\Omega,$$

поэтому $u-w \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Отсюда следует, что $-w \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}$, поэтому имеет место неравенство

$$-(w,v)_{L_2(\Omega)} \geq 0.$$

С другой стороны,

$$(w,v)_{L_2(\Omega)} = (w, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} V d\mu_{\mathcal{L}w} \geq \int\limits_{\omega} V d\mu_{\mathcal{L}u} \geq \varepsilon \mu_{\mathcal{L}u}\{\omega\} > 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что $V|_{\operatorname{supp}\mathcal{L}u} = 0$, поэтому

$$\check{E} * v \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u).$$

2) Пусть $V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u)$. Зададимся функцией $w \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$ и докажем, что $(w-u, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} \geq 0$.

Из теоремы 2.17 и равенства $V|_{\operatorname{supp}\mathcal{L}u} = 0$ следует, что

$$(u, \mathcal{L}V)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} V d\mu_{\mathcal{L}u},$$

поэтому

$$(w-u, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} V d\mu_{\mathcal{L}w} - \int\limits_{\Omega} V d\mu_{\mathcal{L}u} = \int\limits_{\Omega} V d\mu_{\mathcal{L}w} \geq 0.$$

Отсюда следует, что $\check{\mathcal{L}}V \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}^*$. ■

Обозначим через $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u)^*_{\mathcal{L}}$ сопряженную полугруппу для конуса $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u)$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}}$.

Т е о р е м а 6.17. *Пусть $u \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Отображения*

$$\check{E}* : \operatorname{Cl}(K_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}) \longrightarrow \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u)^*_{\mathcal{L}},$$
$$\check{\mathcal{L}} : \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u)^*_{\mathcal{L}} \longrightarrow \operatorname{Cl}(K_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\})$$

взаимно обратны и непрерывны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что

$$\check{E} * v \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u)^*_{\mathcal{L}} \text{ при } u \in \operatorname{Cl}(K_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}),$$
$$\check{\mathcal{L}}V \in \operatorname{Cl}(K_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}) \text{ при } V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u)^*_{\mathcal{L}}.$$

1) Пусть $v \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ и $V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp} \mathcal{L}u)$. Тогда

$$(\check{E} * (v-u), V)_{\mathcal{L}} = (v-u, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} =$$
$$\int\limits_{\Omega} V d\mu_{\mathcal{L}v} - \int\limits_{\Omega} V d\mu_{\mathcal{L}u} = \int\limits_{\Omega} V d\mu_{\mathcal{L}v} \geq 0.$$

Поэтому $\check{E} * (v-u) \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp} \mathcal{L}u)^*_{\mathcal{L}}$. Из соображений непрерывности следует, что для любого $v \in \operatorname{Cl} K_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}$ имеет место включение $\check{E} * v \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp} \mathcal{L}u)^*_{\mathcal{L}}$.

2) Пусть $V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp} \mathcal{L}u)^*_{\mathcal{L}}$. Для любого $U \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp} \mathcal{L}u)$ выполнено неравенство

$$(V, U)_{\mathcal{L}} = (\check{\mathcal{L}}V, \check{\mathcal{L}}U)_{L_2(\Omega)} \geq 0.$$

Поэтому из теоремы 5.17 следует, что

$$\check{\mathcal{L}}V \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}^{**} = \operatorname{Cl}(V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}).$$

Однако $V \in \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega)$, поэтому $\check{\mathcal{L}}V \in \operatorname{Cl}(K_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\})$. ■

Пусть $u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$. В соответствии с теоремой 1.1 замкнутая линейная полугруппа $\operatorname{Cl}(V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\})$ представима в виде прямой суммы

$$\operatorname{Cl}(V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}) = P^u_{\mathcal{L}}(\Omega) \oplus K^u_{\mathcal{L}}(\Omega)$$

замкнутого линейного подпространства

$$P^u_{\mathcal{L}}(\Omega) = \operatorname{Cl}(V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}) \cap -\operatorname{Cl}(V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\})$$

и замкнутого конуса

$$K^u_{\mathcal{L}}(\Omega) = \operatorname{Cl}(V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}) \oplus P^u_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}.$$

В некоторых случаях линейное пространство $P^u_{\mathcal{L}}(\Omega)$ допускает достаточно простое описание.

Т е о р е м а 7.17. *Равенство $P^u_{\mathcal{L}}(\Omega) = L_2(\Omega)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{supp} \mathcal{L}u = \Omega$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что равенство

$$L_2(\Omega) = \operatorname{Cl}(V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}) \cap -\operatorname{Cl}(V_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\})$$

эквивалентно равенству

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp} = \operatorname{Cl}(K_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}) \cap -\operatorname{Cl}(K_{\mathcal{L}}(\Omega)\{u\}).$$

Последнее равенство эквивалентно

$$\overset{0}{W}{}_2^l(\Omega) = \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u)^*_{\mathcal{L}} \cap -\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u)^*_{\mathcal{L}}.$$

Достаточность. Пусть $\operatorname{supp}\mathcal{L}u = \Omega$. Тогда $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u) = 0$. Поэтому имеет место равенство $\overset{0}{W}{}_2^l(\Omega) = \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u)^*_{\mathcal{L}}$, из которого следует равенство $P^u_{\mathcal{L}}(\Omega) = L_2(\Omega)$.

Необходимость. Допустим, что $P^u_{\mathcal{L}}(\Omega) = L_2(\Omega)$, однако множество $\omega = \Omega \backslash \operatorname{supp}\mathcal{L}u$ не пусто. Зададим ненулевую функцию $v \in C_0^\infty(\omega)$. Тогда $v \in \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega)$, поэтому $(v, \varphi)_{\mathcal{L}} \geq 0$ и $(v, -\varphi)_{\mathcal{L}} \geq 0$ для любой функции

$$\varphi \in \overset{+}{C}{}_0^\infty(\omega) \subset \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega, \operatorname{supp}\mathcal{L}u).$$

Из полученных неравенств следует, что

$$(v, \varphi)_{\mathcal{L}} = (\check{\mathcal{L}}v, \check{\mathcal{L}}\varphi)_{L_2(\Omega)} = (\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}v, \varphi) = 0$$

при всех $\varphi \in \overset{+}{C}{}_0^\infty(\omega)$, поэтому $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}v = 0$. Из эллиптичности дифференциального оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$ следует, что $v = 0$. Полученное противоречие доказывает равенство $\operatorname{supp}\mathcal{L}u = \Omega$. ■

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Введем в рассмотрение функцию

$$\gamma_x = \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp}\{E(\cdot - x)|_\Omega\}.$$

Легко видеть, что $\gamma_x \neq 0$ тогда и только тогда, когда $x \in \Omega$, причем $\gamma_x \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ при всех $x \in \Omega$.

Зададим отображение

$$\Gamma : \mathbb{R}^n \longrightarrow L_2(\Omega)$$

по правилу

$$\Gamma : x \mapsto \gamma_x.$$

Легко видеть, что отображение Γ непрерывно, инъективно на Ω и равно нулю на $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Поэтому образ $\Gamma(\mathbb{R}^n)$ отображения Γ гомеоморфен фактор-пространству $\mathbb{R}^n/(\mathbb{R}^n \backslash \Omega)$, элементами которого служат отдельные точки множества Ω и множество $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Например, если Ω – шар, то с топологической точки зрения $\mathbb{R}^n/(\mathbb{R}^n \backslash \Omega)$ – сфера размерности n. В дальнейшем для нас будет существенно то, что множество $\Gamma(\mathbb{R}^n)$ компактно в пространстве $L_2(\Omega)$. Стоит еще заметить, что $\Gamma(\mathbb{R}^n) = \Gamma(\Omega)$.

Пусть $S \subset \Omega$. Введем в рассмотрение линейное пространство

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega, S) = \{u \in L_2(\Omega) : \operatorname{supp}\mathcal{L}u \subset S\},$$

линейную полугруппу

$$V_{\mathcal{L}}(\Omega, S) = \{u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega) : \operatorname{supp} \mathcal{L}u \subset S\}$$

и конус

$$K_{\mathcal{L}}(\Omega, S) = \{u \in K_{\mathcal{L}}(\Omega) : \operatorname{supp} \mathcal{L}u \subset S\}.$$

Т е о р е м а 8.17. *Пусть $S \subset \Omega$. Имеет место равенство*

$$K_{\mathcal{L}}(\Omega, S) = \operatorname{Cl}\operatorname{co}\{\gamma_x : x \in S\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем двойственное равенство

$$K_{\mathcal{L}}(\Omega, S)^* = \operatorname{Cl}\operatorname{co}\{\gamma_x : x \in S\}^*.$$

Пусть $v \in K_{\mathcal{L}}(\Omega, S)^*$ и $x \in S$. Тогда $(v, \gamma_x)_{L_2(\Omega)} \geq 0$, поскольку $\gamma_x \in K_{\mathcal{L}}(\Omega, S)$, поэтому $v \in \operatorname{Cl}\operatorname{co}\{\gamma_x : x \in S\}^*$.

Пусть $v \in \operatorname{Cl}\operatorname{co}\{\gamma_x : x \in S\}^*$. Представим функцию v в виде

$$v = \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(v) + \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}.$$

Включение

$$\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(v) \in K_{\mathcal{L}}(\Omega, S)^*$$

очевидно, поэтому в дальнейшем можно предполагать, что $v \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}$.

Пусть $V = \check{E} * v$ и $x \in S$. Тогда

$$V(x) = (\check{E} * v)(x) = (E(\cdot - x), v)_{L_2(\Omega)} = (\gamma_x, v)_{L_2(\Omega)} \geq 0.$$

Пусть $u \in K_{\mathcal{L}}(\Omega, S)$. Тогда $V(x) \geq 0$ при $x \in \operatorname{supp} \mathcal{L}u$, поэтому из теоремы 2.17 следует, что

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = (u, \check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} V \, d\mu_{\mathcal{L}u} \geq 0.$$

Из последнего неравенства следует, что $v \in K_{\mathcal{L}}(\Omega, S)^*$. ■

С л е д с т в и е. *Пусть $u \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$, тогда*

$$u \in \operatorname{Cl}\operatorname{co}\{\gamma_x : x \in \operatorname{supp} \mathcal{L}u\},$$

поэтому семейство функций $\{\gamma_x : x \in \Omega\}$ служит системой образующих конуса $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$.

Т е о р е м а 9.17. *Пусть $u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Тогда в $V_{\mathcal{L}}(\Omega)$ существует такая последовательность $\mathcal{L}$-сплайнов $u_1, u_2, \ldots$, что*

$$u = \lim_{k \to \infty} u_k$$

в пространстве $L_2(\Omega)$, *при этом* $\operatorname{supp}\mathcal{L}u_k \subset \operatorname{supp}\mathcal{L}u$ *и* $\mu_{\mathcal{L}u_k}\{\Omega\} \le \mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\}$ *при всех* $k = 1, 2, \ldots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} = \infty$. Отметим, что $u = v + w$, где $v \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)$, а $w \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Из теоремы 8.17 следует, что имеет место включение $w \in \operatorname{Cl}\operatorname{co}\{\gamma_x : x \in \operatorname{supp}\mathcal{L}u\}$. Поэтому указанная последовательность $\mathcal{L}$-сплайнов действительно существует.

2) Пусть $\mu_{\mathcal{L}u}\{u\} < \infty$. В этом случае существует такая функция $v \in C^\infty(\Omega)$, что $\mathcal{L}v = 0$ и

$$u = v + (E * \Lambda^\Omega)|_\Omega,$$

где $\Lambda = \mathcal{L}u$. Из включения $E * \Lambda^\Omega \in L_2(\mathbb{R}^n)^{\mathrm{loc}}$ следует включение $(E * \Lambda^\Omega)|_\Omega \in L_2(\Omega)$. Поэтому $v \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)$.

Пусть $\Omega \subset\subset \Omega_0 \subset\subset \mathbb{R}^n$, тогда $(E * \Lambda^\Omega)|_{\Omega_0} \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega_0)$. Поэтому из теоремы 3.16 следует существование такой последовательности $\mathcal{L}$-положительных $\mathcal{L}$-сплайнов $w_1, w_2, \ldots$, что

$$(E * \Lambda^\Omega)|_{\Omega_0} = \lim_{k\to\infty} w_k$$

в пространстве $L_1(\Omega_0)^{\mathrm{loc}}$, при этом

$$\operatorname{supp}\mathcal{L}w_k \subset \operatorname{supp}\mathcal{L}u \text{ и } \mu_{\mathcal{L}w_k}\{\Omega\} \le \mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\}$$

при всех $k = 1, 2, \ldots$. Из теоремы 2.16 следует, что этот предел именет место в пространстве $L_2(\Omega_0)^{\mathrm{loc}}$, поэтому

$$(E * \Lambda^\Omega)|_\Omega = \lim_{k\to\infty} w_k|_\Omega$$

в пространстве $L_2(\Omega)$.

Легко видеть, что последовательность

$$u_k = v + w_k|_\Omega$$

является искомой последовательностью $\mathcal{L}$-сплайнов. ■

Пусть $0 \le \lambda \le \infty$. Введем в рассмотрение множества

$$V_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega) = \{u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega) : \mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} \le \lambda\},$$
$$K_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega) = V_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega) \cap P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp.$$

Отметим, что $V_{\mathcal{L}}^0(\Omega) = P_{\mathcal{L}}(\Omega)$, а $V_{\mathcal{L}}^\infty(\Omega) = V_{\mathcal{L}}(\Omega)$.

Т е о р е м а 10.17. *При* $0 < \lambda < \infty$ *множество* $V_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega)$ *выпукло и замкнуто, а множество* $K_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega)$ *выпукло и компактно, при этом*

$$V_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega) = P_{\mathcal{L}}(\Omega) \oplus K_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega),$$

$$K^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega) = \lambda \operatorname{Cl}\operatorname{conv}\Gamma(\operatorname{Cl}\Omega).$$

Доказательство. 1) Выпуклость множества $V^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega)$ очевидна. Докажем его замкнутость.

Пусть последовательность функций $u_1, u_2, \ldots$ принадлежит множеству $V^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega)$ и сходится к функции u в пространстве $L_2(\Omega)$. Из включения $V^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset V_{\mathcal{L}}(\Omega)$ следует, что $u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Докажем неравенство $\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} \le \lambda$.

Отметим, что

$$\mathcal{L}u = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}u_k$$

в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Пусть $\omega \Subset \Omega$ и $\mu_{\mathcal{L}u}\{\operatorname{Fr}\omega\} = 0$. Из теоремы 3.1 следует, что

$$\mu_{\mathcal{L}u}\{\operatorname{Cl}\omega\} = \lim_{k\to\infty} \mu_{\mathcal{L}u_k}\{\operatorname{Cl}\omega\},$$

поэтому $\mu_{\mathcal{L}u}\{\operatorname{Cl}\omega\} \le \lambda$. Пусть $\omega_0 \Subset \Omega$ – произвольная подобласть, тогда существует такая подобласть $\omega \Subset \Omega$, что $\omega_0 \Subset \omega$ и $\mu_{\mathcal{L}u}\{\operatorname{Fr}\omega\} = 0$, поэтому $\mu_{\mathcal{L}u}\{\omega_0\} \le \lambda$. Однако

$$\Omega = \bigcup_{\omega \Subset \Omega} \omega,$$

поэтому $\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} \le \lambda$. Это неравенство говорит о том, что $u \in V^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega)$, следовательно, множество $V^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega)$ замкнуто.

2) Докажем компактность $K^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Поскольку $K^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega) = \lambda K^1_{\mathcal{L}}(\Omega)$, в дальнейшем можно считать, что $\lambda = 1$.

Пусть $u \in K^1_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Из теоремы 9.17 следует существование такой последовательности $\mathcal{L}$-положительных $\mathcal{L}$-сплайнов $u_1, u_2, \ldots$, что

$$u = \lim_{k\to\infty} u_k$$

в пространстве $L_2(\Omega)$, при этом

$$\operatorname{supp}\mathcal{L}u_k \subset \operatorname{supp}\mathcal{L}u \text{ и } \mu_{\mathcal{L}u_k}\{\Omega\} \le \mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\}$$

при всех $k = 1, 2, \ldots$. Представим $\mathcal{L}$-сплайн u_k в виде

$$u_k = v_k + w_k,$$

где $v_k = \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(u_k)$, а $w_k = \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp}(u_k)$. Отметим, что

$$v_k = \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_{ki}\gamma_{x_{ki}},$$

где $\lambda_{ki} \geq 0$ и $x_{ki} \in \operatorname{supp} \mathcal{L}u$. Однако

$$\|v_k\|^2_{L_2(\Omega)} = (u_k, v_k)_{L_2(\Omega)} = (u_k - u, v_k)_{L_2(\Omega)} \leq \|u_k - u\|_{L_2(\Omega)} \|v_k\|_{L_2(\Omega)},$$

поэтому

$$u = \lim_{k \to \infty} w_k$$

в пространстве $L_2(\Omega)$. Очевидно, что

$$\mu_{\mathcal{L}w_k}\{\Omega\} = \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_{ki},$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^{m_k} \lambda_{ki} \leq 1.$$

Из этого неравенства следует, что вектор

$$w_k = \left(1 - \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_{ki}\right) 0 + \sum_{i=1}^{m_k} \lambda_{ki} \gamma_{x_{ki}}$$

принадлежит $\operatorname{conv} \Gamma(\operatorname{Cl} \Omega)$, поэтому $u \in \operatorname{conv} \Gamma(\operatorname{Cl} \Omega)$. Это включение говорит о том, что $K^1_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset \operatorname{Cl} \operatorname{conv} \Gamma(\operatorname{Cl} \Omega)$. Очевидно, что $\gamma_x \in K^1_{\mathcal{L}}(\Omega)$ при всех $x \in \Omega$, следовательно, из выпуклости и замкнутости множества $K^1_{\mathcal{L}}(\Omega))$ следует что $K^1_{\mathcal{L}}(\Omega) \supset \operatorname{Cl} \operatorname{conv} \Gamma(\operatorname{Cl} \Omega)$. Таким образом, равенство

$$K^1_{\mathcal{L}}(\Omega) = \operatorname{Cl} \operatorname{conv} \Gamma(\operatorname{Cl} \Omega)$$

доказано. Для доказательства компактности множества $K^1_{\mathcal{L}}(\Omega)$ достаточно заметить, что замкнутая выпуклая оболочка компактного множества $\Gamma(\operatorname{Cl} \Omega)$ компактна [17]. ■

§18. Конус положительных функций в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$

В этом параграфе предполагается, что замыкание $\mathrm{Cl}\,\Omega$ области Ω является бесконечно дифференцируемым многообразием с краем $\partial\Omega$. При этом предположении будет доказана теорема Анконы [5] о воспроизводимости конуса $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ в пространстве $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$. А именно будет доказано равенство

$$\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega) = \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega) - \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega).$$

Воспроизводимость конуса $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ влечет за собой ряд интересных следствий. Некоторые из этих следствий имеются в работе [38].

Пусть $G(x,y)$ – функция Грина оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$ для задачи Дирихле в области Ω. Напомним, что

$$G(x,y) = (\gamma_x, \gamma_y)_{L_2(\Omega)},$$

где $x, y \in \Omega$.

Т е о р е м а 1.18. *Пусть* $G(x,y) \geq 0$ *при всех* $x, y \in \Omega$. *Тогда конус* $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ – *воспроизводящий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть функция $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительной. Докажем, что

$$U(x) = \int\limits_\Omega G(x,y)\, d\mu_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U}(y).$$

Действительно, из теоремы 2.17 следует, что

$$\int\limits_\Omega G(x,y)\, d\mu_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U}(y) = \int\limits_\Omega (\check{E} * \gamma_x)(y)\, d\mu_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U}(y) = (\check{\mathcal{L}}U, \check{\mathcal{L}}(\check{E} * \gamma_x))_{L_2(\Omega)} =$$

$$(\mathcal{L}U, \gamma_x)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega U\, d\mu_{\mathcal{L}\gamma x} = \int\limits_\Omega U\, d\mu_{\delta_x} = U(x).$$

2) Пусть $U_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\|\check{\mathcal{L}}U\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[U \in U_0 + \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)]{} \min.$$

Из выпуклости и замкнутости множества $U_0 + \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{L}}$ следует, что указанная задача минимизации имеет единственное решение U^0.

Докажем $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительность U^0. Пусть $\varphi \in \overset{+}{C}{}_0^\infty(\Omega)$, тогда

$$\|\check{\mathcal{L}}(U^0 + \lambda\varphi)\|^2_{L_2(\Omega)} \geq \|\check{\mathcal{L}}U^0\|^2_{L_2(\Omega)}$$

при всех $\lambda \geq 0$, поэтому

$$2\lambda(\check{\mathcal{L}}U^0, \check{\mathcal{L}}\varphi)_{L_2(\Omega)} + \lambda^2\|\check{\mathcal{L}}\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} \geq 0$$

при всех $\lambda \geq 0$. Отсюда следует, что

$$(\check{\mathcal{L}}U^0, \check{\mathcal{L}}\varphi)_{L_2(\Omega)} \geq 0,$$

остается заметить, что

$$(\check{\mathcal{L}}U^0, \check{\mathcal{L}}\varphi)_{L_2(\Omega)} = (\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0, \varphi).$$

Таким образом, $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 \geq 0$.

3) Представим функцию $U_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ в виде

$$U_0 = U_+ - U_-,$$

где $U_+ = U^0$, а $U_- = U^0 - U_0$. Из п. 2) следует, что функция U является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительной, следовательно, с учетом п. 1) имеем, что функция U^0 представима в виде

$$U^0(x) = \int\limits_\Omega G(x,y)d\mu_{\mathcal{L}\mathcal{L}U^0}(y),$$

т.е. $U^0 \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$. Из определения U^0 следует, что $U^0 - U_0 \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$.

Поэтому из произвольности функции $U_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ следует, что конус $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ является воспроизводящим. ■

Т е о р е м а 2.18. *Пусть замыкание* $\mathrm{Cl}\,\Omega$ *области* Ω *является бесконечно дифференцируемым многообразием. Тогда конус* $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ *является воспроизводящим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство сформулированной теоремы основано на том, что функция Грина оператора Δ^l положительна в шаре $\mathrm{Int}\,\mathbb{D}^n$. Осуществляется это доказательство с помощью малого шевеления границы $\partial\Omega$ многообразия $\mathrm{Cl}\,\Omega$, при котором достаточно малая окрестность заданной точки границы $\partial\Omega$ переводится на сферу $\partial\mathbb{D}^n$.

1) Будем говорить, что конус $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ является воспроизводящим в области $\omega \subset \Omega$, если для любой функции $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ существует такая функция $V \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$, что $V|_\omega \geq U|_\omega$.

Докажем, что конус $\overset{+}{W}{}_2^l(\mathbb{R}^n)$ – воспроизводящий в области

$$\omega = \mathbb{R}^n_- \cap \operatorname{Int} \mathbb{D}^n.$$

Пусть $0 < \delta < 1$. Рассмотрим шар $\mathbb{D}^n((-1+\delta)E_n, 1)$, изображенный на рис. 1.

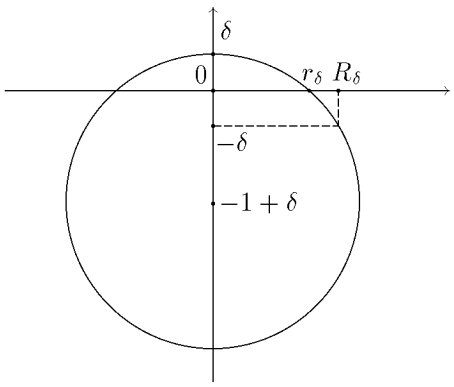


Рис. 1.

Легко видеть, что радиусы r_δ и R_δ имеют вид

$$\begin{aligned} r_\delta &= 2\delta - \delta^2, \\ R_\delta &= 4\delta - 4\delta^2. \end{aligned}$$

Зададимся функцией $h_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющей неравенству

$$0 \leq h_\delta \leq 1$$

и условиям

$$h_\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| \leq r_\delta, \\ 0 & \text{при } |t| \geq R_\delta. \end{cases}$$

Пусть $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ и

$$f_\delta(x') = \begin{cases} h_\delta(\|x'\|)(-1+\delta+(1-\|x'\|^2)^{1/2}) & \text{при } \|x'\| \leq r_\delta, \\ 0 & \text{при } \|x'\| \geq R_\delta. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_\delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ и $|f_\delta(x')| \leq \delta$ при всех $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Для дальнейшего будет важно, что шар $\mathbb{D}^n((-1+\delta)E_n, 1)$ расположен под графиком функции f_δ, причем при $\|x'\| \le r_\delta$ точка $f_\delta(x')$ лежит на сфере, ограничивающей этот шар.

Пусть $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – такая функция, что $0 \le \varphi \le 1$ и

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \le 1/3, \\ 1 & \text{при } t \ge 2/3. \end{cases}$$

Положим $\psi = 1 - \varphi$.

Введем в рассмотрение отображение

$$F_\delta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

определяемое по правилу

$$F_\delta : x \mapsto (x', \Phi_\delta(x)),$$

где функция

$$\Phi_\delta(x) = x_n - \psi(\|x'\|) f_\delta(x') \frac{x_n + 1}{f_\delta(x') + 1} \varphi\left(\frac{x_n + 1}{f_\delta(x') + 1}\right) \psi(x_n - 1).$$

Докажем, что при достаточно малых $\delta > 0$ отображение F_δ является диффеоморфизмом.

Бесконечная дифференцируемость отображения F_δ очевидна. Поэтому для доказательства его диффеоморфности достаточно установить его взаимную однозначность. С этой целью докажем, что при фиксированном $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ функция $\Phi_\delta(x', x_n)$ возрастает по x_n. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_\delta(x', x_n)}{\partial x_n} = 1 - \psi(\|x'\|) \frac{f_\delta(x)}{f_\delta(x') + 1} \Bigg\{ & \varphi\left(\frac{x_n + 1}{f_\delta(x') + 1}\right) \psi(x_n - 1) + \\ & \frac{x_n + 1}{f_\delta(x') + 1} \varphi'\left(\frac{x_n + 1}{f_\delta(x') + 1}\right) \psi(x_n - 1) + \\ & (x_n + 1) \varphi\left(\frac{x_n + 1}{f_\delta(x') + 1}\right) \psi'(x_n - 1) \Bigg\}, \end{aligned}$$

поэтому при достаточно малом $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$\frac{\partial \Phi_\delta(x', x_n)}{\partial x_n} \ge 1/2$$

при всех $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. При указанном δ функция $\Phi_\delta(x', x_n)$ строго возрастает по x_n, а отображение F_δ является диффеоморфизмом.

Выберем $\delta > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство $R_\delta \le 1/3$. Тогда на графике функции f_δ отображение F_δ действует по правилу

$$F_\delta : (x', f_\delta(x')) \mapsto (x', 0),$$

поэтому $F_\delta\{\mathbb{D}^n((-1+\delta)E_n, 1) \subset \mathbb{R}^n_-$.

Пусть $\varepsilon = r_\delta/3$ и $\omega e = \mathbb{R}^n_- \cap \varepsilon \operatorname{Int} \mathbb{D}^n$. Возьмем такую пробную функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \|x\| \le \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \|x\| \ge 2\varepsilon. \end{cases}$$

Пусть $U \in \overset{\circ}{W}{}^l_2(\mathbb{R}^n_-)$. Тогда

$$(\eta U) \circ F_\delta^{-1} \in \overset{\circ}{W}{}^l_2(\operatorname{Int} \mathbb{D}^n((-1+\delta)E_n, 1)).$$

и из теоремы 1.18 следует существование такой функции

$$W \in \overset{+}{W}{}^l_2(\operatorname{Int} \mathbb{D}^n((-1+\delta)E_n, 1)),$$

что $W \ge (\eta U) \circ F_\delta^{-1}$. Пусть $V = W \circ F_\delta$. Очевидно, что $V \in \overset{+}{W}{}^l_2(\mathbb{R}^n_-)$ и при $x \in \omega e$ выполнено неравенство $V(x) \ge U(x)$. Отсюда следует, что конус $\overset{+}{W}{}^l_2(\mathbb{R}^n_-)$ является воспроизводящим в области ωe. Из соображений подобия следует, что этот конус является воспроизводящим в исходной области $\omega = \omega_1$.

2) Докажем, что для любой точки $x \in \operatorname{Cl}\Omega$ существует такое $\varepsilon > 0$, что конус $\overset{+}{W}{}^l_2(\Omega)$ является воспроизводящим в области

$$\omega = \Omega \cap \varepsilon \operatorname{Int} \mathbb{D}^n(x).$$

Если $x \in \Omega$, то сформулированное утверждение очевидно. В этом случае в качестве ε можно взять, например, половину расстояния от точки x до границы $\partial\Omega$.

Если $x \in \partial\Omega$, то сформулированное утверждение следует из доказанной воспроизводимости конуса $\overset{+}{W}{}^l_2(\mathbb{R}^n_-)$ в области $\mathbb{R}^n_- \cap \operatorname{Int} \mathbb{D}^n(0)$.

3) Из компактности $\operatorname{Cl}\Omega$ следует существование такого конечного семейства областей $\omega_1, \ldots, \omega_k \subset \Omega$, что

$$\Omega = \omega_1 \cup \cdots \cup \omega_k$$

и конус $\overset{+}{W}{}^l_2(\Omega)$ является воспроизводящим в каждой области $\omega_1, \ldots, \omega_k$.

Пусть $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и $V_i \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ – такая функция, что

$$V_i|_{\omega_i} \geq U|_{\omega_i},$$

где $i = 1, \ldots, k$. Зададим

$$U_+ = V_1 + \cdots + V_k,$$
$$U_- = U_+ - U.$$

Очевидно, что $U_+, U_- \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$. Однако $U = U_+ - U_-$, поэтому конус $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ является воспроизводящим. ■

С л е д с т в и е. *Из воспроизводимости конуса* $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ *следует существование таких непрерывных отображений*

$$F_+ : \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega) \longrightarrow \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega),$$
$$F_- : \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega) \longrightarrow \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega),$$

что $U = F_+(U) - F_-(U)$ *при всех* $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$, *при этом*

$$\|F_+(U)\|_{W_2^l(\Omega)} + \|F_-(U)\|_{W_2^l(\Omega)} \leq C\|U\|_{W_2^l(\Omega)},$$

где постоянная C *не зависит от выбора функции* $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$.

З а м е ч а н и е. Отметим, что функция $F_-(U)$ имеет более высокий гарантированный порядок гладкости, чем функция $F_+(U)$. Действительно, из теоремы 4.17 следует включение $F_-(U) \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\Omega)$. Однако $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\Omega) \subsetneq H_2^{2l-n/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}}$, где $s > 0$, поэтому неравенство $2l > n$ обеспечивает включение $F_-(U) \in C^{2l-n-1}(\Omega)$.

Т е о р е м а 3.18. *Вложение* $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega) \subsetneq L_1(\Omega, \mu)$, *где* μ – *положительная борелевская мера, имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\mu = \mu_{\mathcal{L}u},$$

где $u \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и $u \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Тогда функция U суммируема по мере $\mu_{\mathcal{L}u}$ на множестве Ω и

$$\int_\Omega U d\mu_{\mathcal{L}u} = (u, \check{\mathcal{L}}U)_{L_2(\Omega)}. \tag{1.18}$$

Действительно, пусть $U = U_+ - U_-$, где $U_+, U_- \in \overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$. Из теоремы 2.17 следует, что функции U_+ и U_- суммируемы по мере $\mu_{\mathcal{L}u}$ на множестве Ω и для них имеет место формула (1.18). Поэтому функция U суммируема по мере $\mu_{\mathcal{L}u}$ на множестве Ω и для нее также имеет место формула (1.18).

Необходимость. Пусть имеет место вложение

$$\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega) \subset\subset L_1(\Omega, \mu).$$

Тогда линейный функционал Λ, определенный по правилу

$$(\Lambda, V) = \int\limits_\Omega V d\mu,$$

непрерывен в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Поэтому в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ существует и единственна такая функция U_μ, что

$$(U_\mu, V) = \int\limits_\Omega V d\mu$$

при всех $V \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Из равенства

$$(\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U_\mu, \varphi) = (\check{\mathcal{L}}U_\mu, \check{\mathcal{L}}\varphi)_{L_2(\Omega)} = (U_\mu, \varphi)_{\mathcal{L}} = \int\limits_\Omega \varphi d\mu,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, следует, что функция U_μ является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительной, поэтому

$$(U_\mu, V)_{\mathcal{L}} = \int\limits_\Omega V d\mu_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U_\mu}.$$

Равенство

$$\int\limits_\Omega V d\mu = \int\limits_\Omega V d\mu_{\mathcal{L}u_\mu}$$

говорит о том, что $\mu = \mu_{\mathcal{L}u}$, где $u_\mu = \check{\mathcal{L}}U_\mu$.

Достаточность. Пусть $U \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и $u \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Тогда

$$|U| \le F_+(U) + F_-(U).$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Omega} |U| d\mu_{\mathcal{L}u} \le \int\limits_{\Omega} F_+(U) d\mu_{\mathcal{L}u} + \int\limits_{\Omega} F_-(U) d\mu_{\mathcal{L}u} =$$
$$(u, \check{\mathcal{L}} F_+(U))_{L_2(\Omega)} + (u, \check{\mathcal{L}} F_-(U))_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\|u\|_{L_2(\Omega)} (\|F_+(U)\|_{\mathcal{L}} + \|F_-(U)\|_{\mathcal{L}}) \le$$
$$C\|u\|_{L_2(\Omega)} (\|F_+(U)\|_{W_2^l(\Omega)} + \|F_-(U)\|_{W_2^l(\Omega)}) \le$$
$$C\|u\|_{L_2(\Omega)} \|U\|_{W_2^l(\Omega)}.$$

Таким образом, имеет место вложение $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega) \subset L_1(\Omega, \mu)$. ■

Из теоремы 3.18 следует общий вид линейного положительного функционала в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$.

С л е д с т в и е. *Для любого линейного положительного функционала* $\Lambda \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ *существует и единственна такая функция* $u_\Lambda \in K_{\mathcal{L}}(\Omega)$, *что*

$$(\Lambda, V) = \int\limits_{\Omega} V d\mu_{\mathcal{L}u_\Lambda}$$

при всех $V \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$.

В заключение этого параграфа установим связь полученных результатов с гипотезой Адамара, которая уже упоминалась во введении. Напомним, что гипотеза Адамара касается положительности функции Грина $G(x, y)$ дифференциального оператора Δ^2 в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Из полученных выше результатов следует, что положительность функции Грина $G(x, y)$ эквивалентна остроугольности конуса субгармонических функций $K_\Delta(\Omega)$. Поэтому гипотезу Адамара можно переформулировать в гипотезу об остроугольности конуса субгармонических функций $K_\Delta(\Omega)$ для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Полученные контрпримеры к гипотезе Адамара говорят о том, что конус $K_\Delta(\Omega)$ бывает остроугольным не всегда.

Нами доказано, что в случае области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$ конус $K_\Delta(\Omega)$ – нормальный. В терминах функции Грина это гарантирует существование такого $\varepsilon > 0$, что

$$G(x, y) \ge (\varepsilon - 1)\sqrt{G(x, x)}\sqrt{G(y, y)}$$

при всех $x, y \in \Omega$, например можно взять ε в виде $\varepsilon = 1 + \cos[K_\Delta(\Omega)]$. Гипотеза Адамара соответствует случаю $\varepsilon = 1$, впервые данный результат был получен в работе [39].

Фактическое вычисление величины $\cos[K_{\mathcal{L}}(\Omega)]$ сопряжено со значительными трудностями. Однако в некоторых случаях эта величина

может быть вычислена. Например, имеет место равенство

$$\cos[K_{\Delta^{l/2}}(\operatorname{Int}\mathbb{D}^n)] = 0.$$

Действительно, из положительности функции Грина дифференциального оператора Δ^l в шаре $\operatorname{Int}\mathbb{D}^n$ следует неравенство

$$\cos[K_{\Delta^{l/2}}(\operatorname{Int}\mathbb{D}^n)] \geq 0.$$

Фиксируем точку $y \in \operatorname{Int} D^n$, тогда

$$\frac{G(x,y)}{\sqrt{G(x,x)}\sqrt{G(y,y)}} = \sigma[(1-\|x\|^2)^{n/2}].$$

Устремляя точку x к сфере $\partial\mathbb{D}^n$, делаем вывод о том, что

$$\cos[K_{\Delta^{l/2}}(\operatorname{Int}\mathbb{D}^n)] = 0.$$

§19. Аппроксимация с дифференциальными ограничениями

В этом параграфе рассматривается задача аппроксимации с дифференциальными ограничениями вида $\mathcal{L}u \geq 0$. Следует заметить, что в литературе наиболее изученными являются одномерные задачи. При этом наиболее часто используется дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = d^l/dx^l.$$

Одномерным задачам аппроксимации с дифференциальным ограничением $\mathcal{L}u \geq 0$ посвящены работы [40–65], многомерному случаю – [66,67].

Пусть $S \subset \Omega$ – замкнутое подмножество. Напомним, что нами было определено линейное пространство

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega, S) = \{u \in L_2(\Omega) : \operatorname{supp}\mathcal{L}u \subset S\}.$$

Положим

$$\begin{aligned}
V_{\mathcal{L}}(\Omega,S) &= V_{\mathcal{L}}(\Omega) \cap P_{\mathcal{L}}(\Omega,S),\\
K_{\mathcal{L}}(\Omega,S) &= K_{\mathcal{L}}(\Omega) \cap P_{\mathcal{L}}(\Omega,S),\\
V^{\lambda}_{\mathcal{L}}(\Omega,S) &= V^{\lambda}_{\mathcal{L}}(\Omega) \cap P_{\mathcal{L}}(\Omega,S),\\
K^{\lambda}_{\mathcal{L}}(\Omega,S) &= K^{\lambda}_{\mathcal{L}}(\Omega) \cap P_{\mathcal{L}}(\Omega,S).
\end{aligned}$$

Из замкнутости S в Ω следует замкнутость $P_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$ в $L_2(\Omega)$. В частности, поэтому множества $V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$, $K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$ и $V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega,S)$ замкнуты, а множество $K_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega,S)$ компактно в пространстве $\mathcal{L}_2(\Omega)$. При этом имеют место равенства

$$V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)=P_{\mathcal{L}}(\Omega)\oplus K_{\mathcal{L}}(\Omega,S),$$
$$V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega,S)=P_{\mathcal{L}}(\Omega)\oplus K_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega,S).$$

Пусть $u_0\in L_2(\Omega)$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\|u-u_0\|_{L_2(\Omega)}\xrightarrow[u\in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega,S)]{}\min.$$

В силу теоремы 3.2 построение решения u^0 этой задачи минимизации сводится к построению сопряженной полугруппы $V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega,S)\{u^0\}^*$. При решении этой задачи мы вначале рассмотрим случай $\lambda=\infty$, а затем $0<\lambda<\infty$. Отметим, что в случае $\lambda=\infty$ имеет место равенство $V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega,S)=V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$.

Т е о р е м а 1.19. *Пусть $u\in V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$. Включение $v\in V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)\{u\}^*$ имеет место тогда и только тогда, когда функция v представима в виде $v=\check{\mathcal{L}}V$, где функция $V\in\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $V|_S\geq 0$ и равенству $V|_{\operatorname{supp}\mathcal{L}u}=0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $v\in V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)\{u\}^*$. Из включений

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega)\subset V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)\subset V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)\{u\}$$

следуют включения

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}\subset V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)^*\subset V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)\{u\}^*,$$

поэтому $v\in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}$. Отсюда $v=\check{\mathcal{L}}V$, где $V=\check{E}*v\in\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$.

Пусть $x\in S$. Тогда из равенства $V(x)=(E(\cdot-x),v)_{L_2(\Omega)}$ и включений $E(\cdot-x)|_{\Omega}\in V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$ и $v\in V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)^*$ следует неравенство $V(x)\geq 0$, поэтому $V|_S\geq 0$.

Пусть $\operatorname{supp}\mathcal{L}u\neq 0$ и $x\in\operatorname{supp}\mathcal{L}u$. Дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 4.17, п. 1) убеждаемся, что $V(x)=0$, поэтому $V|_{supp\,\mathcal{L}u}=0$.

Достаточность. Пусть $v=\check{\mathcal{L}}V$ и функция $V\in\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ удовлетворяет всем условиям, сформулированным в теореме. Если $w\in V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$, то $V(x)\geq 0$ при всех $x\in\operatorname{supp}\mathcal{L}u\cup\operatorname{supp}\mathcal{L}w$. Поэтому из теоремы 1.17 следует

$$(w-u,v)_{L_2(\Omega)}=(w-u,\check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)}=\int\limits_{\Omega}V\,d\mu_{\mathcal{L}w}-\int\limits_{\Omega}d\mu_{\mathcal{L}u}=\int\limits_{\Omega}V\,d\mu_{\mathcal{L}w}\geq 0.$$

Следовательно, $v \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{u\}^*$. ■

Т е о р е м а 2.19. *Для любой функции $U_0 \in W_2^l(\Omega)$ существует и единственна $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительная функция*

$$U^0 \in U_0 + \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega),$$

удовлетворяющая неравенству

$$U^0|_S \geq U_0|_S$$

и включению

$$\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 \subset \{x \in S : U^0(x) = U_0(x)\}.$$

Функция U^0 является решением задачи минимизации

$$\|\check{\mathcal{L}}U\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[U \in U_0 + \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega) : U|_S \geq U_0|_S]{} \min. \tag{1.19}$$

Если $U_0 = \check{E} * u_0$, где $u_0 \in L_2(\Omega)$, то функция $u^0 = \check{\mathcal{L}}U^0$ является решением задачи минимизации

$$\|u - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)]{} \min. \tag{2.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) *Существование.* Докажем, что функция

$$U^0 = U_0 + \check{E} * \mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)^*}(-\mathcal{L}U_0) \tag{3.19}$$

удовлетворяет всем перечисленным условиям.

Действительно, из равенства (3.19) имеем

$$\check{\mathcal{L}}U^0 = \check{\mathcal{L}}U_0 + \mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)^*}(-\check{\mathcal{L}}U_0).$$

Поэтому из равенства (4.3) имеем равенство

$$\check{\mathcal{L}}U^0 = \mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(-\check{\mathcal{L}}U_0), \tag{4.19}$$

говорящее о том, что $\check{\mathcal{L}}U^0 \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)$. Отсюда следует $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительность функции U^0.

Так как $P_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)$, то $P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp \subset V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)^*$, следовательно,

$$\mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)} * (-\check{\mathcal{L}}U_0) \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp$$

и из теоремы 1.12 следует, что имеет место включение

$$U^0 \in U_0 + \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega).$$

Согласно равенству (4.19) имеем

$$\check{\mathcal{L}}U^0 \in \check{\mathcal{L}}U_0 + V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{\check{\mathcal{L}}U^0\}^*.$$

Используя теорему 1.19, получаем

$$\mathcal{L}V = \check{\mathcal{L}}U^0 - \check{\mathcal{L}}U_0,$$

где функция $V \in \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega)$ удовлетворяет неравенству

$$V|_S \geq 0$$

и равенству

$$V|_{\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0} = 0.$$

Таким образом

$$U^0|_S \geq U_0|_S,$$
$$\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 \subset \{x \in \Omega : U^0(x) = U_0(x)\}.$$

Включение $\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 \subset S$ непосредственно вытекает из включения $\check{\mathcal{L}}U^0 \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)$.

2) *Единственность.* Предположим, что $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительная функция $U^1 \in U_0 + \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega)$ удовлетворяет неравенству

$$U^1|_S \geq U_0|_S$$

и включению

$$\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^1 \subset \{x \in S : U^1(x) = U_0(x)\}.$$

Докажем, что $U^1 = U^0$, где функция U^0 доопределена формулой (3.19). С этой целью докажем, что

$$\check{\mathcal{L}}U^1 \in \check{\mathcal{L}}U_0 + V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{\check{\mathcal{L}}U^1\}^*. \tag{5.19}$$

Пусть $V = U^1 - U_0$, тогда функция $V \in \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega)$ удовлетворяет неравенству $V|_S \geq 0$ и равенству $V|_{\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^1} = 0$. Согласно теореме 1.19 имеем $\check{\mathcal{L}}V \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{\check{\mathcal{L}}U^1\}^*$. Теперь для доказательства (5.19) остается заметить, что $\check{\mathcal{L}}U^1 - \check{\mathcal{L}}U_0 = \check{\mathcal{L}}V$.

Из включения (5.19) следует, что $\check{\mathcal{L}}U^1 = \mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(\check{\mathcal{L}}U_0)$, поэтому $\check{\mathcal{L}}U^1 = \check{\mathcal{L}}U^0$. Итак,

$$U^1 - U_0 \in \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega), U^0 - U_0 \in \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega) \text{ и } \check{\mathcal{L}}(U^1 - U_0) = \check{\mathcal{L}}(U^0 - U_0),$$

следовательно, $U^1 - U_0 = U^0 - U_0$, откуда $U^1 = U^0$.

3) *Экстремальные задачи.* Из равенства (4.19) и теоремы 3.3 следует, что функция $\check{\mathcal{L}}U^0$ является решением задачи минимизации

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[u \in \mathcal{L}U_0 + V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)^*]{} \min.$$

Пусть функция $U \in U_0 + \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ удовлетворяет неравенству

$$U|_S \geq U_0|_S.$$

Проверим, что

$$\check{\mathcal{L}}U \in \check{\mathcal{L}}U_0 + V_{\mathcal{L}}(\Omega, S).$$

Действительно, если $u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)$, то из теоремы 1.17 получаем

$$(\check{\mathcal{L}}(U - U_0), u)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} (U - U_0) d\mu_{\mathcal{L}u} \geq 0,$$

поскольку $\operatorname{supp} \mathcal{L}u \subset S$.

Из включения $\check{\mathcal{L}}U \in \check{\mathcal{L}}U_0 + V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)^*$ следует, что

$$\|\check{\mathcal{L}}U^0\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\check{\mathcal{L}}U\|_{L_2(\Omega)},$$

поэтому функция U^0 является решением задачи минимизации (1.19).

Пусть $u_0 \in L_2(\Omega)$ и $U_0 = \check{E} * u_0$. Тогда равенство (4.19) говорит о том, что функция $u^0 = \check{\mathcal{L}}U^0$ является решением задачи минимизации (2.19). ■

С л е д с т в и е. *Решение u^0 задачи*

$$\|u - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)]{} \min$$

определяется за три шага:

1) определяется свертка

$$U_0 = \check{E} * u_0;$$

2) определяется $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительная функция

$$U^0 \in U_0 + \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega),$$

удовлетворяющая неравенству

$$U^0|_S \geq U_0|_S$$

и включению

$$\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0 \subset \{x \in S : U^0(x) = U_0(x)\};$$

3) определяется решение задачи

$$u^0 = \check{\mathcal{L}}U^0.$$

З а м е ч а н и е. Отметим, что операторы, действующие на первом и третьем шагах этого алгоритма, линейные и их суперпозиция является тождественным оператором в пространстве $L_2(\Omega)$. Оператор, действующий на втором шаге алгоритма нелинейный.

Т е о р е м а 3.19. *Пусть* $0 < \lambda < \infty$ *и* $u \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)$. *В случае* $\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} < \lambda$ *имеет место равенство*

$$V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\}^* = V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{u\}^*.$$

Если $\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} = \lambda$ *включение* $v \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\}^*$ *имеет место тогда и только тогда, когда функция* v *представима в виде* $v = \check{\mathcal{L}}V$, *где функция* $V \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ *удовлетворяет условию*

$$V|_{supp\,\mathcal{L}u} = \inf_{x \in S} V(x) \le 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} < \lambda$. Установим равенство

$$\operatorname{Cl} V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\} = \operatorname{Cl} V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{u\}.$$

Поскольку

$$V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\} \subset V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{u\},$$

включение

$$\operatorname{Cl} V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\} \subset \operatorname{Cl} V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{u\}$$

очевидно.

Пусть $v \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{u\}$. Тогда $v = \gamma(w - u)$ при некоторых $\gamma > 0$ и $w \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)$. Из теоремы 7.17 следует существование такой последовательности $\mathcal{L}$-положительных $\mathcal{L}$-сплайнов $w_1, w_2, \ldots$, что

$$w = \lim_{k \to \infty} w_k$$

в пространстве $L_2(\Omega)$ и $\operatorname{supp} \mathcal{L}w_k \subset \operatorname{supp} \mathcal{L}w$ при всех $k = 1, 2, \ldots$.

Докажем, что $w_k - u \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\}$. Действительно, пусть выполнены неравенства $0 < \varepsilon_k < 1$ и $\varepsilon_k \mu_{\mathcal{L}w_k}\{\Omega\} \le \lambda - \mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\}$. Тогда

$$\varepsilon_k w_k + (1 - \varepsilon_k)u \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S),$$

поскольку

$$\mu_{\mathcal{L}(\varepsilon_k w_k+(1-\varepsilon_k)u)}\{\Omega\} = \varepsilon_k \mu_{\mathcal{L}w_k}\{\Omega\} + (1-\varepsilon_k)\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} \le \lambda.$$

Так как

$$(\varepsilon_k w_k + (1-\varepsilon_k)u) - u = \varepsilon_k(w_k - u),$$

то

$$w_k - u \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\}.$$

Отсюда следует, что

$$w - u \in \operatorname{Cl} V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\},$$

поэтому $v \in \operatorname{Cl} V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\}$.

Таким образом, установлено, что

$$\operatorname{Cl} V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\} \supset \operatorname{Cl} V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{u\}.$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Cl} V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\} = \operatorname{Cl} V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{u\}.$$

2) Пусть $\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} = \lambda$. Поскольку $\lambda < 0$, из этого предположения следует, что множество $\operatorname{supp} \mathcal{L}u$ непусто.

Необходимость. Пусть $v \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\}^*$. Отметим, что

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\},$$

поэтому

$$P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp} \supset V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\}^*.$$

Отсюда следует, что $v = \check{\mathcal{L}}V$, где $V = \check{E} * v \in \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega)$.

Пусть $w \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)$, тогда

$$(w-u, v)_{L_2(\Omega)} = (w-u, \check{\mathcal{L}}u)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} V\, d\mu_{\mathcal{L}w} - \int\limits_{\Omega} V\, d\mu_{\mathcal{L}u} \ge 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega} V\, d\mu_{\mathcal{L}w} \ge \int\limits_{\Omega} V\, d\mu_{\mathcal{L}u}, \tag{6.19}$$

Пусть

$$\upsilon = \inf_{x \in S} V(x).$$

Тогда из неравенства (6.19) получаем

$$\int\limits_{\Omega} V\,d\mu_{\mathcal{L}w} \geq \upsilon\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} = \upsilon\lambda.$$

В частности, при $w = 0$ из полученного неравенства следует, что $\upsilon \leq 0$.

Пусть $x_0 \in \operatorname{supp}\mathcal{L}u$. Докажем, что $V(x_0) = \upsilon$. Предположим, что $V(x_0) > \upsilon$. Из непрерывности функции V следует существование такой окрестности $\omega \subset\subset \Omega$ точки x_0, что $V(x) \geq \upsilon + \delta$ при некотором $\delta > 0$ для всех $x \in \omega$. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega} V\,d\mu_{\mathcal{L}u} = \int\limits_{\Omega\setminus\omega} V\,d\mu_{\mathcal{L}u} + \int\limits_{\omega} V\,d\mu_{\mathcal{L}u} \geq \upsilon\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\setminus\omega\} + (\upsilon+\delta)\mu_{\mathcal{L}u}\{\omega\} =$$
$$\upsilon\mu_{\mathcal{L}u}\{\Omega\} + \delta\mu_{\mathcal{L}u}\{\omega\} = \upsilon\lambda + \delta\mu_{\mathcal{L}u}\{\omega\}.$$

Отметим, что включение $x_0 \in \operatorname{supp}\mathcal{L}u$ влечет неравенство $\mu_{\mathcal{L}u}\{\omega\} > 0$. Пусть $x_1 \in S$ – такая точка, что

$$V(x_1) - \upsilon < \delta\mu_{\mathcal{L}u}\{\omega\}/\lambda.$$

Зададим $w = \lambda E(\cdot - x_1)|_{\Omega}$. Тогда $w \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)$ и

$$\int\limits_{\Omega} V\,d\mu_{\mathcal{L}w} = \lambda V(x_1) < \upsilon\lambda + \delta\mu_{\mathcal{L}u}\{\omega\}.$$

Однако из полученной выше оценки следует, что

$$\int\limits_{\Omega} V\,d\mu_{\mathcal{L}u} \geq \upsilon\lambda + \delta\mu_{\mathcal{L}u}\{\omega\}.$$

Полученная пара неравенств противоречит неравенству (6.19), поэтому $V(x_0) = \upsilon$.

Достаточность. Пусть $\upsilon = \check{\mathcal{L}}V$, где функция V удовлетворяет перечисленным условиям. Пусть $w \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)$. Установим, что

$$(w - u, v)_{L_2(\Omega)} \geq 0.$$

Действительно,

$$(w-u,v)_{L_2(\Omega)} = (w-u,\check{\mathcal{L}}V)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} V\,d\mu_{\mathcal{L}w} - \int\limits_{\Omega} V\,d\mu_{\mathcal{L}u} =$$

$$\int\limits_{\Omega} V\,d\mu_{\mathcal{L}w} - \upsilon\lambda \geq \upsilon\mu_{\mathcal{L}w}\{\Omega\} - \upsilon\lambda = -\upsilon(\lambda - \mu_{\mathcal{L}w}\{\Omega\}) \geq 0,$$

где $\upsilon = \inf\limits_{x\in S} V(x)$. Отсюда следует, что $v \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{u\}^*$. ■

Т е о р е м а 4.19. *Пусть $0 \leq \tau \leq \infty$. Для любой функции $U_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ существует и единственна $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительная функция*

$$U_\tau^0 \in U_0 + \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega),$$

удовлетворяющая неравенству

$$U_\tau^0|_S \geq U_0|_S - \tau$$

и включению

$$\operatorname{supp}\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U_\tau^0 \subset \{x \in S : U_\tau^0(x) = U_0(x) - \tau\}.$$

Функция U_τ^0 является решением задачи минимизации

$$\|\check{\mathcal{L}}U\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[U\in U_0+\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)\cdot U|_S \geq U_0|_S - \tau]{} \min.$$

Если $U_0 = \check{E} * u_0$, где $u_0 \in L_2(\Omega)$, то функция $u_\tau^0 = \check{\mathcal{L}}U_\tau^0$ является решением задачи минимизации

$$\|u - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[u\in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega,S)]{} \min,$$

где $\lambda = \mu_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U_\tau^0}\{\Omega\}$.

Функция $\Lambda(\tau) = \mu_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U_\tau^0}\{\Omega\}$ непрерывна и строго монотонно убывает до нуля на интервале $[0, \max\{0, \tau_\infty\}]$, где

$$\tau_\infty = -\inf_{x\in S}(U_\infty^0(x) - U_0(x)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Хочется предупредить, что доказательство теоремы достаточно длинное. При этом движение будет от λ к τ.

1) Пусть $0 \leq \lambda \leq \infty$ и $v_0 \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp$. Зададим

$$v(\lambda)^0 = \mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega,S)}(v_0) = \mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega,S)}(v_0).$$

Пусть $V_0 = \check{E} * v_0$ и $V(\lambda)^0 = \check{E} * v(\lambda)^0$. Отметим, что согласно теореме 1.12 справедливы включения $V_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и $V(\lambda)^0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Ясно, что

$$v(0)^0 = 0 \text{ и } v(\infty)^0 = \mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0) = \mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0).$$

Положим

$$T(\lambda) = -\inf_{x\in S}(V(\lambda)^0(x) - V_0(x)),$$

очевидно, что

$$V(\lambda)^0|_S \geq V_0|_S - T(\lambda). \tag{7.19}$$

Докажем, что

$$\operatorname{supp}\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}V(\lambda)^0 \subset \{x \in S : V(\lambda)^0(x) = V_0(x) - T(\lambda)\}. \tag{8.19}$$

Пусть $\lambda_\infty = \mu_{\mathcal{L}v(\lambda)^0}\{\Omega\}$ и $\lambda \geq \lambda_\infty$. Тогда $v(\infty)^0 \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)$ и $v(\lambda)^0 = v(\infty)^0$. Поэтому из теоремы 2.19 следуют равенство $T(\lambda) = 0$ и включение (8.19). Предположим, что $0 \leq \lambda < \lambda_\infty$. Тогда из теоремы 3.19 и включения

$$v(\lambda)^0 - v_0 \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)\{v(\lambda)^0\}^*$$

следует, что $\mu_{\mathcal{L}v(\lambda)^0}\{\Omega\} = \lambda$. Действительно, неравенство $\mu_{\mathcal{L}v(\lambda)^0}\{\Omega\} < \lambda$ влечет равенство $v(\lambda)^0 = v(\infty)^0$, которое противоречит выбору λ. Итак, $\mu_{\mathcal{L}v(\lambda)^0}\{\Omega\} = \lambda$. Поэтому из теоремы 3.19 следуют неравенство $T(\lambda) \geq 0$ и включение (8.19).

2) Докажем, что функция $V(\lambda)^0$ является решением задачи минимизации

$$\|\check{\mathcal{L}}V\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[v\in\overset{0}{W}{}_2^l(\Omega):v|_S\geq v_0|_S - T(\lambda)]{} \min.$$

В самом деле, если $\lambda \geq \lambda_\infty$, то $T(\lambda) = 0$, и поэтому сформулированное утверждение является следствием теоремы 2.19.

Пусть $0 \leq \lambda < \lambda_\infty$. Тогда достаточно установить, что

$$(\check{\mathcal{L}}V, \check{\mathcal{L}}V(\lambda)^0)_{L_2(\Omega)} \geq (\check{\mathcal{L}}V(\lambda)^0, \check{\mathcal{L}}V(\lambda)^0)_{L_2(\Omega)}$$

для всех функций $V \in \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega)$, удовлетворяющих неравенству

$$V|_S \geq V_0|_S - T(\lambda).$$

При $0 \leq \lambda < \lambda_\infty$ было установлено равенство $\lambda = \mu_{\bar{\mathcal{L}}(\lambda)}\{\Omega\}$. Поэтому доказываемое неравенство следует из неравенства

$$(\check{\mathcal{L}}V, \check{\mathcal{L}}V(\lambda)^0)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega V d\mu_{\mathcal{L}\bar{\mathcal{L}}V(\lambda)^0} \geq \int_\Omega V_0 d\mu_{\mathcal{L}\bar{\mathcal{L}}V(\lambda)^0} - \lambda T(\lambda)$$

и равенства

$$(\check{\mathcal{L}}V, \check{\mathcal{L}}V(\lambda)^0)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega V d\mu_{\mathcal{L}\bar{\mathcal{L}}V(\lambda)^0} = \int_\Omega V_0 d\mu_{\mathcal{L}\bar{\mathcal{L}}V(\lambda)^0} - \lambda T(\lambda).$$

3) Докажем, что отображение

$$f : \lambda \mapsto \mathfrak{P}_{K^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0),$$

действующее из $[0,\infty]$ в пространство $P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp$, непрерывно.

Очевидно, что

$$K^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega,S) = \lambda K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$$

при всех $0 < \lambda < \infty$, поэтому

$$\mathfrak{P}_{K^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0) = \mathfrak{P}_{\lambda K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(\lambda v_0/\lambda) = \lambda \mathfrak{P}_{K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0/\lambda).$$

Множество $K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$ компактно, поэтому существует такая постоянная C, что $\|v\|_{L_2(\Omega)} \le C$ при всех $v \in K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$.

Непрерывность в точке $\lambda_0 = 0$ следует из неравенства

$$|f(\lambda) - f(0)| = \|\mathfrak{P}_{K^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0)\|_{L_2(\Omega)} = \lambda \|\mathfrak{P}_{\lambda K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0)\|_{L_2(\Omega)} \le C\lambda.$$

Непрерывность в точке $\lambda_0 > 0$ следует из неравенства

$$\begin{gathered}
|f(\lambda) - f(\lambda_0)| = \|\mathfrak{P}_{K^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0) - \mathfrak{P}_{K^{\lambda_0}_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0)\|_{L_2(\Omega)} = \\
\|\lambda \mathfrak{P}_{K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0/\lambda) - \lambda_0 \mathfrak{P}_{K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0/\lambda_0)\|_{L_2(\Omega)} \le \\
\|\lambda \mathfrak{P}_{K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0/\lambda) - \lambda_0 \mathfrak{P}_{K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0/\lambda)\|_{L_2(\Omega)} + \\
\|\lambda_0 \mathfrak{P}_{K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0/\lambda) - \lambda_0 \mathfrak{P}_{K^1_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0/\lambda)\|_{L_2(\Omega)} = \\
|1 - \lambda_0/\lambda| \ \|v_0\|_{L_2(\Omega)} + |\lambda_0/\lambda - 1| \ \|v_0\|_{L_2(\Omega)} = \\
2|1 - \lambda_0/\lambda| \ \|v_0\|_{L_2(\Omega)}.
\end{gathered}$$

Докажем непрерывность в точке $\lambda_0 = \infty$. Пусть точки $x_1, x_2, \ldots$ образуют всюду плотное подмножество в множестве S. Тогда векторы $\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}, \ldots$ служат системой образующих конуса $K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$. Поэтому из теоремы 2.6 следует, что

$$v(\infty)^0 = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{P}_{\mathrm{co}\{\gamma_{x_1},\ldots,\gamma_{x_k}\}}(v_0)$$

в пространстве $L_2(\Omega)$. Пусть

$$\delta_k = \|\mathfrak{P}_{\mathrm{co}\{\gamma_{x_1},\ldots,\gamma_{x_k}\}}(v_0) - v_0\|_{L_2(\Omega)} - \|v(\infty)^0 - v_0\|_{L_2(\Omega)}.$$

Очевидно, для любого k существует такое λ_k, что

$$\mathfrak{P}_{\mathrm{co}\{\gamma_{x_1},\ldots,\gamma_{x_k}\}}(v_0) \in V^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega,S)$$

при всех $\lambda \geq \lambda_k$, поэтому

$$\|v(\lambda)^0 - v_0\|_{L_2(\Omega)} \leq \|v(\infty)^0 - v_0\|_{L_2(\Omega)} + \delta_k,$$

где $\lambda \geq \lambda_k$. Используя теорему 1.6, получаем

$$\|v(\lambda)^0 - v_0\|^2_{L_2(\Omega)} \leq 2\delta_k \|v(\lambda)^0 - v_0\|_{L_2(\Omega)} + \delta_k^2,$$

где $\lambda \geq \lambda_k$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем k так, чтобы было выполнено неравенство

$$2\delta_k \|v(\infty)^0 - v_0\|_{L_2(\Omega)} + \delta_k^2 \leq \varepsilon^2.$$

Тогда $\|v(\lambda)^0 - v_0\|_{L_2(\Omega)} \leq \varepsilon$ при всех $\lambda \geq \lambda_k$, поэтому функция f непрерывна в точке $\lambda_0 = \infty$.

4) *Функция* T. Докажем, что функция T непрерывна на $[0, \infty)$. Действительно, отображение

$$\lambda \mapsto v(\lambda)^0 - v_0$$

непрерывно переводит $[0, \infty)$ в пространство $P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}$. Поэтому из теоремы 1.12 следует, что отображение

$$\lambda \mapsto V(\lambda)^0 - V_0$$

непрерывно переводит $[0, \infty)$ в пространство $\overset{0}{W}{}_2^l(\Omega)$. Теперь непрерывность функции T следует из вложения $\overset{0}{W}{}_2^l(\Omega) \subset C^0(\mathrm{Cl}\,\Omega)$.

В п. 1) было доказано, что $T(\lambda) = 0$ при $\lambda_\infty \leq \lambda \leq \infty$, причем случай $\lambda_\infty = \infty$ не исключается.

Докажем, что функция T строго монотонно убывает на $[0, \lambda_\infty]$. Случай $\lambda_\infty = 0$ тривиален. Пусть $\lambda_\infty > 0$.

Пусть $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_\infty$. Допустим, что $T(\lambda_1) = T(\lambda_2) = \tau$. Тогда из п. 2) следует, что обе функции $V(\lambda_1)^0$ и $V(\lambda_2)^0$ являются решениями задачи минимизации

$$\|\mathcal{L}V\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[V \in \overset{0}{W}{}_2^l(\Omega): V|_S \geq V_0|_S - \tau]{} \min,$$

поэтому $V(\lambda_1)^0 = V(\lambda_2)^0$. Отсюда следует, что $v(\lambda_1)^0 = v(\lambda_2)^0$. Однако при условии $0 \leq \lambda < \lambda_\infty$ в п. 1) было доказано равенство $\mu_{\mathcal{L}^v}\{\Omega\} = \lambda$. Поэтому $\lambda_1 = \lambda_2$. Полученное противоречие доказывает, что

$$T(\lambda_1) \neq T(\lambda_2).$$

Однако функция T положительна и

$$\lim_{\lambda \to \lambda_\infty} T(\lambda) = 0.$$

Поэтому функция T строго монотонно убывает на $[0, \lambda_\infty)$ до нуля.

5) *Существование.* Пусть $\tau = \infty$. Тогда из теоремы 3.12 следует, что функция U^0_∞ существует, единственна и имеет вид

$$U^0_\infty = U_0 + \check{E} * \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp}(-\mathcal{L}U_0).$$

Поэтому при $\tau \geq \max\{0, \tau_\infty\}$ функция

$$U^0_\tau = U^0_\infty$$

удовлетворяет всем требованиям теоремы. Единственность функции U^0_τ при $\max\{0, \tau_\infty\} \leq \tau < \infty$ будет доказана позднее.

Пусть $\tau = 0$. Тогда из теоремы 2.19 следует, что функция U^0 существует, единственна и имеет вид

$$U^0 = U_0 + \check{E} * \mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)}(-\mathcal{L}U_0).$$

Итак, существование функции U^0_τ осталось доказать только в случае $0 < \tau_\infty$ при $0 < \tau < \tau_\infty$.

Зададим $V_0 = U_0 - U^0_\infty$ и $v_0 = \mathcal{L}V_0$. Из включения $V_0 \in \overset{0}{W}{}^l_2(\Omega)$ следует, что $v_0 \in P_{\mathcal{L}}(\Omega)^\perp$ и $V_0 = \check{E} * v_0$. Поэтому функции v_0 и V_0 удовлетворяют всем предположениям, сформулированным в п. 1).

Пусть $0 \leq \lambda \leq \infty$. Зададим $W(\lambda)^0 = V(\lambda)^0 + U^0_\infty$, тогда

$$T(\lambda) = \inf_{x \in S}(W(\lambda)^0(x) - U_0(x)),$$

поэтому

$$W(\lambda)^0|_S \geq U_0|_S - T(\lambda), \tag{9.19}$$

$$\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}W(\lambda)^0 \subset \{x \in S : W(\lambda)(x)^0 = U_0(x) - T(\lambda)\}. \tag{10.19}$$

Заметим, что функция $W(\lambda)^0 \in U_0 + \overset{0}{W}{}^l_2(\Omega)$ является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительной.

Из определения τ_∞ и равенства $W(\lambda)^0 = U^0_\infty$ следует равенство $T(0) = \tau_\infty$. Поэтому из п. 4) получаем, что на отрезке $[0, \lambda_\infty]$ функция T непрерывна и строго монотонно убывает от τ_∞ до 0. Отсюда для заданного $\tau \in (0, \tau_\infty)$ существует и единственна такая точка $\lambda \in (0, \lambda_\infty)$, что $\tau = T(\lambda)$. Поэтому из неравенства (9.19) и включения (10.19) заключаем, что функция $U_\tau = W(\lambda)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы.

6) *Экстремальные задачи и единственность.* Докажем, что функция $W(\lambda)^0$ является решением задачи минимизации

$$\|\mathcal{L}U\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[U \in U_0 + \overset{0}{W}{}^l_2(\Omega) : U|_S \geq U_0|_S - T(\lambda)]{} \min.$$

Допустим, что функция $\tilde{W}(\lambda)^0$ является решением этой задачи. Тогда функция $\tilde{V}(\lambda)^0 = \tilde{W}(\lambda)^0 - U^0_\infty$ есть решение задачи минимизации

$$\|\mathcal{L}V\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[V \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega) : V|_S \geq V_0|_S - T(\lambda)]{} \min.$$

Поэтому из п. 2) следует, что $\tilde{V}(\lambda)^0 = V(\lambda)^0$, откуда $\tilde{W}(\lambda)^0 = W(\lambda)^0$.

Полученный результат позволяет доказать единственность функции U^0_τ. При $\tau > \tau_\infty$ единственность функции U^0_τ следует из теоремы 3.12, при $\tau = 0$ – из теоремы 2.19. Поэтому требуется доказать единственность только в случае $0 > \tau \geq \tau_\infty$. Однако в этом случае функция U^0_τ удовлетворяет неравенству

$$U^0_\tau| \geq U_0|_S - T(\lambda)$$

и включению

$$\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0_\tau \subset \{x \in S : U^0_\tau(x) = U(x) - T(\lambda)\},$$

где $\lambda \in [0, \lambda_\infty)$ – такое число, что $\tau = T(\lambda)$. Поэтому функция U^0_τ является решением задачи минимизации

$$\|\check{\mathcal{L}}U\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[U \in U_0 + \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega) : U|_S \geq U_0|_S - \tau]{} \min,$$

следовательно, функция U^0_τ единственна.

Пусть $u_0 \in L_2(\Omega)$ и $U_0 = \check{E} * u_0$. Зададим функции $V_0 = U_0 - U^0_\infty$ и $v_0 = \mathcal{L}V_0$. Тогда $v(\lambda)^0 = \mathfrak{P}_{K^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(v_0)$ и $v(\lambda)^0 = \mathcal{L}V(\lambda)^0$. Если $0 \leq \tau \leq \tau_\infty$ и $\tau = T(\lambda)$, где $0 \leq \lambda \leq \lambda_\infty$, то

$$u^0_\tau = \mathcal{L}U^0_\tau = \mathcal{L}W(\lambda)^0 = \mathcal{L}U^0_\infty + \mathcal{L}V(\lambda)^0 = \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(u_0) + \mathfrak{P}_{K^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_0) = \mathfrak{P}_{V^\lambda_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_0),$$

при этом из п. 1) получаем, что $\lambda = \mu_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0_\tau}\{\Omega\}$. При $\tau > \tau_\infty$ равенство

$$u^0_\tau = \mathfrak{P}_{V^0_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_0) = \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(u_0)$$

следует из теоремы 3.12.

7) *Функция* Λ. В п. 4) было доказано, что на отрезке $[0, \infty]$ функция T непрерывна и строго монотонно убывает до нуля. При этом из равенства $T(\lambda) = \tau$, где $\lambda \in [0, \lambda_\infty]$, вытекает равенство $\lambda = \mu_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U^0_\tau}\{\Omega\}$, а из неравенства $\lambda_\infty > 0$ следует, что $\tau_\infty = T(0) > 0$. Обозначим через Λ функцию, обратную для функции T. Тогда на отрезке $[0, \tau_\infty]$ функция Λ непрерывна и строго монотонно убывает до

нуля. Так как равенство $\Lambda(\tau) = \lambda$, где $\tau \in [0, \tau_\infty]$, влечет равенство $\tau = T(\lambda)$, где $\lambda \in [0, \lambda_\infty]$, то имеет место соотношение $\lambda = \mu_{\mathcal{L}\mathcal{L}U_\tau^0}\{\Omega\}$. Поэтому $\Lambda(\tau) = \mu_{\mathcal{L}\mathcal{L}U_\tau^0}\{\Omega\}$ при $\tau \in [0, \tau_\infty]$. ■

С л е д с т в и е. *Решение* u_λ^0 *задачи*

$$\|u - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[u \in V_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega, S)]{} \min$$

определяется следующим образом.

Определяется решение u_0^0 *задачи*

$$\|u - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[u \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)]{} \min .$$

Если $\mu_{\mathcal{L}u_0^0}\{\Omega\} \le \lambda$, *то* $u_\lambda^0 = u_0^0$, *если* $\mu_{\mathcal{L}u_0^0}\{\Omega\} > \lambda$, *то* $\tau_\infty > 0$ *и на отрезке* $[0, \tau_\infty]$ *существует такая точка* τ, *что* $\mu_{\mathcal{L}\mathcal{L}U_\tau^0}\{\Omega\} = \lambda$ *и в этом случае* $u_\lambda^0 = \mathcal{L}U_\tau^0$.

Отметим, что точное решение уравнения $\Lambda(\tau) = \lambda$ удается осуществить только в исключительных случаях. Однако функция Λ непрерывна и строго монотонно убывает до нуля на отрезке $[0, \tau_\infty]$. Поэтому для приближенного решения этого уравнения можно, например, применить метод бисекции. Этот метод позволяет построить такую убывающую последовательность $\tau_1 = \tau_\infty > \tau_2 > \tau_3 > \ldots$, что

$$\tau = \lim_{k \to \infty} \tau_k ,$$

где $\Lambda(\tau) = \lambda$. Из доказательства теоремы 4.19 следует, что

$$u_\lambda^0 = \lim_{k \to \infty} \mathcal{L}U_{\tau_k}^0$$

в пространстве $L_2(\Omega)$. Заметим, что

$$\mathcal{L}U_{\tau_k}^0 \in V_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega, S)$$

при всех $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому аппроксимирующая последовательность лежит на множестве $V_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega, S)$, на которое и проектируется точка u_0.

Пусть множество $S \subset \Omega$ бесконечно, а точки $x_1, x_2, \ldots$ образуют счетное всюду плотное подмножество в множестве S. Тогда

$$K_{\mathcal{L}}(\Omega, S) = \mathrm{Cl}\,\mathrm{co}\{\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}, \ldots\},$$
$$K_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega, S) = \lambda\,\mathrm{Cl}\,\mathrm{conv}\{0, \gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}, \ldots\},$$

где $0 < \lambda < \infty$. Поэтому из теорем 2.6 и 3.6 следует, что

$$\mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_0) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{P}_{\mathrm{co}\{\gamma_{x_1},\dots,\gamma_{x_k}\}}(u_0),$$
$$\mathfrak{P}_{K\lambda_{\mathcal{L}(\Omega,S)}}(u_0) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{P}_{\lambda\,\mathrm{conv}\{0,\gamma_{x_1},\dots\gamma_{x_k}\}}(u_0)$$

в пространстве $L_2(\Omega)$. Однако

$$\mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)} = \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)} + \mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)},$$
$$\mathfrak{P}_{V^{\lambda}_{\mathcal{L}}(\Omega,S)} = \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)} + \mathfrak{P}_{K^{\lambda}_{\mathcal{L}}(\Omega,S)},$$

поэтому

$$\mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_0) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S_k)}(u_0),$$
$$\mathfrak{P}_{V^{\lambda}_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_0) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{P}_{V^{\lambda}_{\mathcal{L}}(\Omega,S_k)}(u_0)$$

в пространстве $L_2(\Omega)$, где $S_k = \{x_1,\dots,x_k\}$.

Эти два соотношения позволяют утверждать, что для приближенного построения решения u^0_λ задачи минимизации

$$\|u - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[u\in V^{\lambda}_{\mathcal{L}}(\Omega,S)]{} \min$$

достаточно иметь процедуру ее приближенного решения в случае конечного множества S.

Пусть множество $S = \{x_1,\dots,x_k\}$ конечно. Из следствия к теоореме 4.19 вытекает, что интересующая нас задача минимизации сводится к построению функции U^0_τ по функции $U_0 = \check{E} * u_0$. Опишем алгоритм построения функции U^0_τ для произвольной функции $U_0 \in W^l_2(\Omega)$.

Пусть $I \subset \{1,\dots,k\}$. Обозначим через V_I тот единственный $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайн, который согласно теореме 1.14 удовлетворяет включению

$$V_I \in U_0 + \overset{\circ}{W}{}^l_2(\Omega)$$

и интерполяционным условиям

$$V_I(x_i) = U_0(x_i) - \tau$$

при $i \in I$.

Алгоритм построения функции U^0_τ сводится к построению такого подмножества $I \subset \{1,\dots,k\}$, что $U^0_\tau = V_I$, и состоит из трех пунктов. В начале работы алгоритма предполагается, что $I = \varnothing$.

Пункт A. Пусть построено такое подмножество $I \subset \{1,\dots,k\}$, что $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайн является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительной функцией с множеством существенных узловых точек I. Зададим

$$\mu = \min_{1\le i\le k} \{V_I(x_i) - V_0(x_i) + \tau\}$$

Если $\mu \geq 0$, то $U_\tau^0 = V_I$, и алгоритм работу заканчивает. Пусть $\mu > 0$. Выберем тот номер i_0, при котором реализуется указанный минимум и перейдем к пункту B.

Пункт B. Определим максимальное $t \in [0,1]$, при котором $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайн

$$V = (1-t)V_I + tV_I$$

является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительной функцией. Сформируем множество I из существенных узловых точек $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайна V и перейдем к пункту C.

Пункт C. Определим максимальное $t \in [0,1]$, при котором $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайн

$$W = (1-t)V + tV_I$$

является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительной функцией. Сформируем множество I из существенных узловых точек $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайна W. Если $t = 1$, то переходим к пункту A. Если $t > 1$, то полагаем $V = W$ и повторяем пункт C.

§20. Дифференциальные неравенства в одномерном случае

В одномерном случае $n = 1$ дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{l} a_k \frac{d^k}{dx^k}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $a_l = 1$. Очевидно, что дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ является эллиптическим при всех l, поэтому справедливы все сформулированные в предыдущих параграфах теоремы. Однако в случае $n = 1$ многие из этих общих теорем допускают существенные уточнения, выделяющие его из случая $n \geq 2$, поэтому одномерному случаю посвящен отдельный параграф.

Оказывается, что в одномерном случае $\mathcal{L}$-положительные функции допускают достаточно простое описание на языке классического анализа. А именно, локально каждая $\mathcal{L}$-положительная функция совпадает с функцией, выпуклой относительно системы Чебышева

$$Z^{(l-1)}, \ldots, Z^{(0)}.$$

Напомним, что через Z обозначено такое решение дифференциального уравнения $\mathcal{L}u = 0$, что $Z^{(0)}(0) = \cdots = Z^{(l-1)}(0) = 0$ и $Z^{(l-1)}(0) = 1$. Попутно напомним, что функция $E = Z\theta$, где θ – функция Хевисайда, является фундаментальным решением дифференциального оператора $\mathcal{L}$.

Напомним определение выпуклости относительно системы Чебышева [33].

Пусть функции $\varphi_0, \ldots, \varphi_{l-1}$ образуют систему Чебышева на открытом отрезке $\Omega = (a, b)$. Функция u, заданная на отрезке Ω, называется выпуклой относительно системы Чебышева $\varphi_0, \ldots, \varphi_{l-1}$, если

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0, & \ldots, & x_{l-1}, & x_l \\ \varphi_0, & \ldots, & \varphi_{l-1}, & u \end{pmatrix} \geq 0$$

при всех $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_l < b$.

В качестве примера рассмотрим функции, выпуклые относительно классической системы Чебышева $1, x, \ldots, x^{l-1}$.

При $l = 1$ эти функции удовлетворяют неравенству

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ u(x_0) & u(x_1) \end{vmatrix} = u(x_1) - u(x_0) \geq 0.$$

Поэтому функции, выпуклые относительно системы Чебышева, образованной из функции 1, являются возрастающими на Ω.

При $l = 2$ эти функции удовлетворяют неравенству

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ u(x_0) & u(x_1) & u(x_2) \end{vmatrix} =$$
$$(x_1 - x_0)u(x_1) - (x_2 - x_0)u(x_1) + (x_2 - x_1)u(x_0) \geq 0.$$

Поэтому функции, выпуклые относительно системы Чебышева, образованной из функций 1 и x, являются выпуклыми на Ω.

В общем случае функции, выпуклые относительно системы Чебышева $1, x, \ldots, x^{l-1}$, называются l-выпуклыми.

Т е о р е м а 1.20. *Пусть на $\Omega = (a, b)$ дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ допускает факторизацию. Включение $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$ имеет место тогда и только тогда, когда функция u выпукла относительно системы Чебышева $Z^{(l-1)}, \ldots, Z^{(0)}$ на Ω.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для удобства

$$\varphi_0 = Z^{(l-1)}, \ldots, \varphi_{l-1} = Z^{(0)}.$$

Из теоремы 3.14 следует, что функции $\varphi_0, \ldots, \varphi_{l-1}$ образуют систему Чебышева на Ω.

1) *Случай $u \in C^\infty(\Omega)$.* Докажем предварительно, что функция $u \in C^\infty(\Omega)$ выпукла относительно системы Чебышева на отрезке Ω тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}u \geq 0$.

Пусть $a < x_0 < \cdots < x_{l-1} < b$. Рассмотрим функцию

$$f_l(x) = \sum_{k=0}^{l-1} C_k \varphi_k(x) + \int_0^x Z(x-y)dy.$$

Отметим, что $\mathcal{L}f_l = 1$. Подберем постоянные $C_0, C_1, \ldots, C_{l-1}$ так, что функция f_l обращается в нуль в точках $x_0^l = x_0, \ldots, x_{l-1}^l = x_{l-1}$. Поскольку функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{l-1}$ образуют систему Чебышева на Ω, такие постоянные $C_0, C_1, \ldots, C_{l-1}$ существуют и единственны.

Пусть

$$\mathcal{L} = \left(\frac{d}{dx} - \psi_1\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - \psi_2\right)$$

– факторизация дифференциального оператора $\mathcal{L}$ на отрезке Ω. Зададим

$$f_k = \left(\frac{d}{dx} - \psi_{k+1}\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - \psi_l\right) f_l.$$

Легко видеть, что

$$\left(\frac{d}{dx} - \psi_{k+1}\right) f_{k+1} = f_k,$$

где $k = 0, 1, \ldots, l-1$. Поскольку $f_0 = 1$, из обобщенной теоремы Ролля следует, что функция f_l обращается в нуль только в точках $x_0^l, \ldots, x_{l-1}^l$. Докажем, что $f_l(x) > 0$ при $x > x_{l-1}^l$. Из обобщенной теоремы Ролля следует, что функция f_k обращается в нуль в некоторых точках $x_0^k < \cdots < x_{k-1}^k$. Решая дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d}{dx} - \psi_{k+1}\right) f_{k+1} = f_k$$

с начальным условием $f_{k+1}(x_k^{k+1}) = 0$, имеем

$$f_{k+1}(x) = \int_{x_k^{k+1}}^x f_k(y) \exp\left(\int_y^x \psi_{k+1}(\tau)d\tau\right) dy.$$

Поэтому $f_{k+1}(x) > 0$ при $x > x_k^{k+1}$, если $f_k(x) > 0$ при $x > x_k^{k+1}$. Однако $f_0 = 1$ и $x_0^1 < x_1^2 < \cdots < x_{l-1}^l$, поэтому последовательно получаем, что $f_l(x) > 0$ при $x > x_{l-1}^l$.

Зададим

$$r(x) = \Delta\begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{l-1} & x \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{l-1} & u \end{pmatrix} \Bigg/ \Delta\begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{l-1} \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{l-1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что функция $r(x)$ представима в виде

$$r(x) = u(x) - \varphi(x),$$

где функция φ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathcal{L}\varphi = 0$.

Рассмотрим функцию

$$R(x) = u(x) - \varphi(x) - M f_l(x) \tag{1.20}$$

и подберем постоянную M так, чтобы в некоторой фиксированной точке $x_l \in (x_{l-1}, b)$ было выполнено равенство $R(x_l) = 0$. Функция R обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \ldots, x_l$ и поэтому из обобщенной теоремы Ролля следует существование такой точки $\xi \in (x_0, x_l)$, что $\mathcal{L}R(\xi) = 0$.

Применяя дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ к равенству (1.20), получаем значение $M = \mathcal{L}u(\xi)$. Итак, имеет место равенство

$$r(x_l) = \mathcal{L}u(\xi) f_l(x_l),$$

поэтому

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{l-1} & u \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{l-1} \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{l-1} \end{pmatrix} \mathcal{L}u(\xi) f_l(x_l), \tag{2.20}$$

где $x_0 < \xi < x_l$. Отметим, что $f_l(x_l) > 0$ и

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{l-1} \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{l-1} \end{pmatrix} > 0.$$

Необходимость. Пусть функция $u \in C^\infty(\Omega)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству $\mathcal{L}u \geq 0$. Тогда из равенства (2.20) имеем

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{l-1} & u \end{pmatrix} \geq 0,$$

поэтому функция u выпукла относительно системы Чебышева $\varphi_0, \ldots, \varphi_{l-1}$ на $\Omega = (a, b)$.

Достаточность. Пусть функция u выпукла относительно системы Чебышева $\varphi_0, \ldots, \varphi_{l-1}$ на отрезке Ω и $x \in \Omega$. Зададим

$$x_k = x + \varepsilon k,$$

где $k = 0, 1, \ldots, l-1$, а $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Из представления (2.20) получаем, что $\mathcal{L}u(\xi) \geq 0$. Так как $|x - \xi| \leq l\varepsilon$, то из соображений непрерывности следует, что $\mathcal{L}u(x) \geq 0$. Из произвольности $x \in \Omega$ имеем $\mathcal{L}u \geq 0$.

2) *Общий случай. Необходимость.* Пусть $y \in \Omega$. Докажем, что функция $E(\cdot - y)$ выпукла относительно системы Чебышева $\varphi_0, \ldots, \varphi_{l-1}$ на Ω.

Пусть $l = 1$. Тогда

$$\mathcal{L} = d/dx + a_0,$$

поэтому $E(x) = e^{-a_0 x}\theta(x)$. Итак,

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ \varphi_0 & E(\cdot - y) \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{при } a < x_0 \le x_1 < y, \\ e^{-a_0(x_0+x_1-y)} & \text{при } a < x_0 < y \le x_1 < b, \\ 0 & \text{при } y \le x_0 \le x_1 < b, \end{cases}$$

поэтому

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ \varphi_0 & E(\cdot - y) \end{pmatrix} \ge 0$$

при $a < x_0 \le x_1 < b$.

Пусть $l \ge 2$. Отметим, что функция $E(\cdot - y)$ непрерывна. Пусть $h_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ есть ε-шапочка. Очевидно, что

$$\mathcal{L}\{E(\cdot - y) * h_\varepsilon\} = \delta_y * h_\varepsilon(\cdot - y) = h_\varepsilon(\cdot - y) \ge 0.$$

Так как $E(\cdot - y) * h_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, то из п. 1) следует, что функция $E(\cdot - y) * h_\varepsilon$ выпукла относительно системы Чебышева $\varphi_0, \ldots, \varphi_{l-1}$ на отрезке Ω. Из непрерывности функции $E(\cdot - y)$ следует, что

$$E(\cdot - y) = \lim_{\varepsilon \to \infty} E(\cdot - y) * h_\varepsilon$$

равномерно на отрезке $[a, b]$. Поэтому

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{l-1} & E(\cdot - y) \end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon \to \infty} \Delta \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{l-1} & E(\cdot - y) * h_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{l-1} & E(\cdot - y) \end{pmatrix} \ge 0$$

при всех $a < x_0 \le \cdots \le x_l < b$.

Пусть $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$ и $a < x_0 \le \cdots \le x_l < b$. Пусть $\omega = (\alpha, \beta)$, где $a < \alpha < x_0 \le x_l < \beta < b$. Тогда из теоремы 1.16 получаем

$$u(x) = v(x) + \int\limits_{\omega} E(\cdot - y) d\mu_{\mathcal{L}u}(y),$$

где $\mathcal{L}v = 0$. Заметим, что $v = C_0\varphi_0 + \cdots + C_{l-1}\varphi_{l-1}$, поэтому

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \dots & \varphi_{l-1} & v \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \dots & \varphi_{l-1} & u \end{pmatrix} =$$
$$\int\limits_{\omega} \Delta \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \dots & \varphi_{l-1} & E(\cdot - y) \end{pmatrix} d\mu_{\mathcal{L}u}(y) \ge 0,$$

поэтому функция u является выпуклой относительно системы Чебышева $\varphi_0, \dots, \varphi_{l-1}$ на Ω.

Достаточность. Предположим, что функция u выпукла относительно системы Чебышева $\varphi_0, \dots, \varphi_{l-1}$ на Ω.

Пусть $l = 1$. Поскольку $\varphi_0(x) = e^{-a_0 x}$ при $a < x_0 \le x_1 < b$, имеет место неравенство

$$\begin{vmatrix} e^{-a_0 x_0} & e^{-a_0 x_1} \\ u(x_0) & u(x_1) \end{vmatrix} \ge 0,$$

из которого следует, что

$$e^{-a_0 x_0} u(x_1) \ge e^{-a_0 x_1} u(x_0),$$

откуда

$$e^{a_0 x_0} u(x_0) \le e^{a_0 x_1} u(x_1).$$

Таким образом, функция $v(x) = e^{a_0 x} u(x)$ возрастает на Ω, поэтому $v \in L_1(\Omega)^{\mathrm{loc}}$. Так как $u(x) = e^{-a_0 x} v(x)$, то $u \in L_1(\Omega)^{\mathrm{loc}}$.

Докажем, что $\mathcal{L}u \ge 0$. Пусть $\varphi \in \overset{+}{C}{}_0^{\infty}(\Omega)$, тогда

$$(\mathcal{L}u, \varphi) = (-a_0 e^{-a_0 x} v + e^{-a_0 x} v' + a_0 e^{-a_0 x} v, \varphi) =$$
$$(e^{-a_0 x} v', \varphi) = (v', e^{-a_0 x}\varphi) = (v', \psi) =$$
$$\int\limits_a^b \psi(x) dv(x) \ge 0,$$

так как пробная функция $\psi(x) = e^{-a_0 x}\varphi(x)$ положительна, а функция v – возрастающая. Итак, $(\mathcal{L}u, \varphi) \geq 0$, поэтому $\mathcal{L}u \geq 0$.

Пусть $l \geq 2$. Докажем, что $u \in C^0(\Omega)$. Пусть $a < x_0 < x_1 < \cdots < x_l < b$. Будем в определителе

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \varphi_1 & \dots & \varphi_{l-1} & u \end{pmatrix} \geq 0 \tag{3.20}$$

точки $x_0, x_2, \dots, x_l$ считать фиксированными, а точку x_1 – переменной. Из формулы конечных приращений следует, что

$$\varphi_k(x_1) = \varphi_k(x_0) + \varphi_k'(\xi_k)(x_1 - x_0)$$

при всех $k = 0, \dots, l-1$, где $x_0 < \xi_k < x_1$. Вычтем в определителе (3.20) из второго столбца первый и разделим полученный второй столбец на $x_1 - x_0 > 0$. В результате получим неравенство

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0'(\xi_0) & \varphi_0(x_2) & \dots & \varphi_0(x_l) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{l-1}(x_0) & \varphi_{l-1}'(\xi_0) & \varphi_{l-1}(x_2) & \dots & \varphi_{l-1}(x_l) \\ u(x_0) & \frac{u(x_1)-u(x_0)}{x_1-x_0} & u(x_2) & \dots & u(x_l) \end{vmatrix} \geq 0$$

и поэтому

$$(-1)^{l+2}\frac{u(x_1) - u(x_0)}{x_1 - x_0} \geq C, \tag{4.20}$$

где C не зависит от точки x_1.

Пусть $a < x_{-1} < x_0 < \cdots < x_{l-1} < b$. Считаем в определителе

$$\Delta \begin{pmatrix} x_{-1} & x_0 & x_1 & \dots & x_{l-2} & x_{l-1} \\ \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_{l-1} & u \end{pmatrix} \geq 0 \tag{5.20}$$

точки $x_{-1}, x_0, x_2, \dots, x_{l-1}$ фиксированными, а точку x_1 – переменной. Вычтем в определителе (5.20) из третьего столбца второй и разделим полученный третий столбец на $x_1 - x_0 > 0$. В результате получим неравенство

$$(-1)^{l+3}\frac{u(x_1) - u(x_0)}{x_1 - x_0} \geq C. \tag{6.20}$$

Сравнивая неравенства (4.20) и (6.20), делаем вывод, что

$$\left|\frac{u(x_1) - u(x_0)}{x_1 - x_0}\right| \geq C,$$

где постоянная C не зависит от точки x_1. Из этого неравенства и предположения $x_0 < x_1$ следует, что функция u непрерывна справа в точке x_0.

Аналогичным образом (вычитая из первого столбца второй и из второго столбца третий) доказываем, что функция u непрерывна в точке x_0 слева. Поэтому $u \in C^0(\Omega)$.

Докажем, что $\mathcal{L}u \geq 0$. Пусть $\varphi \in \overset{+}{C}{}_0^\infty(\Omega)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset \omega \Subset \Omega$, где $\omega = (\alpha, \beta)$, тогда

$$(\mathcal{L}u, \varphi) = (u, \mathcal{L}\varphi) = \int\limits_\omega u(x)\mathcal{L}\varphi(x)dx.$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция u выпукла относительно системы Чебышева $\varphi_0, \ldots, \varphi_{l-1}$ на отрезке $(\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$. Поэтому из равенства

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{l-1} & u * h_\varepsilon \end{pmatrix} =$$
$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h_\varepsilon(y)\Delta \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{l-1} & u(\cdot - y) \end{pmatrix} dy$$

следует, что функция $u * h_\varepsilon$ выпукла относительно той же системы Чебышева на отрезке (α, β). Однако $u * h_\varepsilon \in C^\infty(\omega)$ и поэтому из п. 1 получаем, что на ω функция $u * h_\varepsilon$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\mathcal{L}(u * h_\varepsilon) \geq 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_\omega (u * h_\varepsilon)(x)\mathcal{L}\varphi(x)dx \geq 0.$$

Используя непрерывность функции u, имеем

$$u = \lim_{\varepsilon \to \infty} u * h_\varepsilon$$

равномерно на ω, поэтому

$$\int\limits_\omega u(x)\mathcal{L}\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int\limits_\omega (u * h_\varepsilon)(x)\mathcal{L}\varphi(x)dx$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_\omega u(x)\mathcal{L}\varphi(x)dx \geq 0.$$

Поэтому $\mathcal{L}u \geq 0$. ■

Следствие. *Пусть $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$, тогда для любой точки $x_0 \in \Omega$ существует интервал $x_0 \in \omega \subset \Omega$, в котором функция u выпукла относительно системы Чебышева $Z^{(l-1)}, \ldots, Z^{(0)}$.*

Теорема 2.20. *Пусть $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$. Тогда множество*

$$\{x \in \Omega : u(x) = 0\}$$

образовано из конечного числа интервалов, которые могут вырождаться в точки.

Доказательство. 1) Пусть $\omega = (\alpha, \beta) \subset \Omega$ и $\beta - \alpha < \pi/h(\mathcal{L})$. Установим, что множество $\{x \in \omega : u(x) = 0\}$ образовано либо из одного отрезка, либо из $k \leq l$ точек.

Действительно, из включения $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$ следует, что функция u выпукла относительно системы Чебышева $\varphi_0 = Z^{(l-1)}, \ldots, \varphi_{l-1} = Z^{(0)}$ на отрезке ω. Пусть $\alpha < x_0 < \cdots < x_l < \beta$ и $u(x_k) = 0$ при всех $k = 0, 1, \ldots, l$. Докажем, что $u(x) = 0$ при всех $x \in [x_0, x_l]$.

Пусть $l = 1$, тогда $u = e^{-a_0 x} v$, где функция v возрастает на Ω. Из $u(x_0) = u(x_1) = 0$ следует $v(x_0) = v(x_1) = 0$. Из возрастания v получаем, что $v(x) = 0$ при всех $x \in [x_0, x_1]$. Отсюда вытекает требуемое.

Пусть $l = 2$. Зададим $x \in (x_k, x_{k+1})$, где $0 < k < l - 1$. Тогда

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{k-1} & x & x_{k+1} & \ldots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_{k-1} & \varphi_k & \varphi_{k+1} & \ldots & \varphi_{l-1} & u \end{pmatrix} \geq 0.$$

Раскладывая этот определитель по последней строке, имеем

$$(-1)^{l+k+2} u(x) \geq 0.$$

Аналогично

$$\Delta \begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_k & x & x_{k+2} & \ldots & x_{l-1} & x_l \\ \varphi_0 & \ldots & \varphi_k & \varphi_{k+1} & \varphi_{k+2} & \ldots & \varphi_{l-1} & u \end{pmatrix} \geq 0$$

и поэтому

$$(-1)^{l+k+3} u(x) \geq 0.$$

Отсюда следует, что $u(x) = 0$.

Итак, если функция u обращается в нуль в $l + 1$ различных точках отрезка ω, то она равна нулю на всем отрезке, лежащем между крайними точками. Поэтому, если множество $\{x \in \omega : u(x) = 0\}$ бесконечно, то оно образовано из одного отрезка, а если это множество конечно, то оно состоит из $k \geq l$ точек.

2) Пусть Ω помещен в объединении m отрезков длиной, строго меньшей $\pi/h(\mathcal{L})$. Тогда из п. 1) следует, что множество

$$\{x \in \Omega : u(x) = 0\}$$

образовано из конечного числа интервалов, которые могут вырождаться в точки. Общее число этих интервалов не превышает lm. ■

Пусть $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$ и $\omega = (\alpha, \beta) \subset \Omega$. Из теоремы 1.16 следует существование такой функции v, что $\mathcal{L}v = 0$ и

$$u(x) = v(x) + \int\limits_{\omega} E(x-y)d\mu_{\mathcal{L}u}(y).$$

Поскольку $E = Z\theta$, это равенство может быть переписано в виде

$$u(x) = v(x) + \int\limits_{(\alpha,x]} Z(x-y)d\mu_{\mathcal{L}u}(y) \tag{7.20}$$

При этом в (7.20) можно считать, что $x \in (\alpha, b)$. Условимся, что

$$\int\limits_{(\alpha,x]} f(y)d\mu_{\mathcal{L}u}(y) = -\int\limits_{(x,\alpha]} f(y)d\mu_{\mathcal{L}u}(y)$$

при $x \leq \alpha$. Тогда в (7.20) можно считать, что $x \in \Omega$.

Из (7.20) следует, что

$$u^{(k)}(x) = v^{(k)}(x) + \int\limits_{(\alpha,x]} Z^{(k)}(x-y)d\mu_{\mathcal{L}u}(y)$$

при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$. В частности, поэтому функция имеет конечную вариацию на любом интервале $\omega \subset \Omega$. Будем для единообразия считать, что функция с локально конечной вариацией непрерывна справа.

В следующей теореме вычисляется скачок функции $u^{(l-1)}$ в точке разрыва. Через $\mu_{\mathcal{L}u}\{x\}$ обозначена мера $\mu_{\mathcal{L}u}$ точки $x \in \Omega$.

Т е о р е м а 3.20. *Пусть* $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}'_{\mathcal{L}}(\Omega)$. *Тогда*

$$u^{(l-1)}(x+0) - u^{(l-1)}(x-0) = \mu_{\mathcal{L}u}\{x\}$$

при всех $x \in \Omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $u^{(l-1)}$ непрерывна справа, имеет место равенство

$$u^{(l-1)}(x+0) - u^{(l-1)}(x) = 0.$$

Поэтому остается показать, что

$$u^{(l-1)}(x) - u^{(l-1)}(x-0) = \mu_{\mathcal{L}u}\{x\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Имеем

$$\int\limits_{(\alpha,x]} Z^{(l-1)}(x-y)d\mu_{\mathcal{L}u}(y) - \int\limits_{(\alpha,x-\varepsilon]} Z^{(l-1)}(x-\varepsilon-y)d\mu_{\mathcal{L}u}(y) =$$

$$\int\limits_{(\alpha,x-\varepsilon]} (Z^{(l-1)}(x-y) - Z^{(l-1)}(x-\varepsilon-y))d\mu_{\mathcal{L}u}(y) +$$

$$\int\limits_{(x-\varepsilon,x]} Z^{(l-1)}(x-y)d\mu_{\mathcal{L}u}(y) =$$

$$\int\limits_{(\alpha,x-\varepsilon]} Z^{(l-1)}(x-y-\xi_1(y)\varepsilon)(-\varepsilon)d\mu_{\mathcal{L}u}(y) +$$

$$\int\limits_{(x-\varepsilon,x]} \{1 + Z^{(l)}(\xi_2(y)(x-y))(x-y)\}d\mu_{\mathcal{L}u}(y) \xrightarrow[\varepsilon\to\infty]{}$$

$$\int\limits_{\{x\}} 1 d\mu_{\mathcal{L}u}(y) = \mu_{\mathcal{L}u}\{x\}.$$

Здесь $0 < \xi_1(y), \xi_2(y) < 1$ – величины, участвующие в формуле конечных приращений. Остается заметить, что функция $v^{(l-1)}$ непрерывна и справедливо равенство

$$u^{(l-1)}(x) = v^{(l-1)}(x) + \int\limits_{(\alpha,x]} Z^{(l-1)}(x-y)d\mu_{\mathcal{L}u}(y). \quad \blacksquare$$

С л е д с т в и е. *Множество точек непрерывности функции* $u^{(l-1)}$ *совпадает с множеством* $\{x \in \Omega : \mu_{\mathcal{L}u}\{x\} = 0\}$.

При $n = 1$ из теоремы 3.16 следует вложение

$$\overset{+}{\mathcal{D}}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset H_2^{l-1/2-s}(\Omega)^{\mathrm{loc}},$$

где $s > 0$. В частности, если $l \geq 2$, то имеет место вложение

$$\overset{+}{\mathcal{D}}'_{\mathcal{L}}(\Omega) \subset C^{l-2}(\Omega).$$

В следующей теореме содержится дополнительная информация о сходимости производных порядка $l-1$.

Т е о р е м а 4.20. *Пусть последовательность $\mathcal{L}$-положительных функций $u_1, u_2, \ldots$ сходится к $\mathcal{L}$-положительной функции u_0 в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u_0\|_{C^{l-1}[\alpha,\beta]} = 0$$

для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset \{x \in \Omega : \mu_{\mathcal{L}u_0}\{x\} = 0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что норма $\|\cdot\|_{C^{l-1}[\alpha,\beta]}$ определяется здесь по правилу

$$\|u\|_{C^{l-1}[\alpha,\beta]} = \sum_{k=1}^{l-1} \sup_{\alpha\leq x\leq\beta} |u^{(k)}(x)|.$$

Это тривиальное замечание сделано в связи с тем, что $\mathcal{L}$-положительные функции $u_1^{(l-1)}, u_2^{(l-1)}, \ldots$ могут иметь точки разрыва на отрезке $[\alpha, \beta]$. Заметим еще, что функция $u_0^{(l-1)}$ непрерывна на этом отрезке.

Пусть $\alpha_0 \in (a, \alpha)$ – такая точка, что $\mu_{\mathcal{L}u}\{\alpha_0\} = 0$ при $k \geq 0$. Используя представление (7.20), запишем

$$u_k(x) = v_k(x) + w_k(x),$$

где $\mathcal{L}v_k = 0$, а

$$w_k(x) = \int\limits_{(\alpha_0, x]} Z(x-y) d\mu_{\mathcal{L}u_k}(y).$$

Пусть $l \geq 2$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u_0\|_{C^{l-2}[\alpha,\beta]} = 0.$$

Поэтому для окончательного доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что при $l \geq 1$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\alpha\leq x\leq\beta} |u_k^{(l-1)}(x) - u_0^{(l-1)}(x)| = 0.$$

Докажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\alpha\leq x\leq\beta} |w_k^{(l-1)}(x) - w_0^{(l-1)}(x)| = 0.$$

Предположим противное; тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек отрезка $[\alpha, \beta]$ и такая подпоследовательность $i_1, i_2, \ldots$ натуральных чисел, что

$$|w_{i_k}^{(l-1)}(x_k) - w_0^{(l-1)}(x_k)| > \varepsilon$$

при всех $k = 1, 2, \ldots$. Не умаляя общности, можно считать, что

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$$

и подпоследовательность $i_1, i_2, \ldots$ совпадает с последовательностью $1, 2, \ldots$.

Итак,

$$|w_k^{(l-1)}(x_k) - w_0^{(l-1)}(x_k)| \le |w_k^{(l-1)}(x_k) - w_k^{(l-1)}(x_0)| +$$
$$|w_k^{(l-1)}(x_0) - w_0^{(l-1)}(x_k)| + |w_0^{(l-1)}(x_0) - w_0^{(l-1)}(x_k)| = S_k^1 + S_k^2 + S_k^3.$$

Пусть $m_k = \min\{x_0, x_k\}$ и $p_k = \max\{x_0, x_k\}$. Очевидно,

$$S_k^1 \le \sup_{\alpha_0 \le y \le m_k} |Z^{(l-1)}(x_k - y) - Z^{(l-1)}(x_0 - y)| \mu_{\mathcal{L}u_k}\{[\alpha_0, m_k]\} +$$
$$\sup_{m_k \le y \le p_k} |Z^{(l-1)}(p_k - y)| \mu_{\mathcal{L}u_k}\{[m_k, p_k]\}.$$

Легко видеть, что

$$\mu_{\mathcal{L}u_k}\{[\alpha_0, m_k]\} \le C$$

при всех $k = 0, 1, \ldots$ и

$$\sup_{m_k \le y \le p_k} |Z^{(l-1)}(p_k - y)| \le C$$

при всех $k = 0, 1, \ldots$ Кроме того,

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{\alpha_0 \le y \le m_k} |Z^{(l-1)}(x_k - y) - Z^{(l-1)}(x_0 - y)| = 0.$$

Докажем, что

$$\lim_{k \to \infty} \mu_{\mathcal{L}u_k}\{[m_k, p_k]\} = 0.$$

Пусть $\delta > 0$. Зададим

$$\bar{m}_k = \inf\{m_k, m_{k+1}, \ldots\}, \quad \bar{p}_k = \sup\{p_k, p_{k+1}, \ldots\}.$$

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty}\bar{m}_k=\lim_{k\to\infty}\bar{p}_k=x_0,$$

то существует такой номер k_1, что

$$\mu_{\mathcal{L}u_0}\{[\bar{m}_k,\bar{p}_k]\}\le\delta/2$$

при всех $k\ge k_1$. Из теоремы 4.15 следует существование такого номера k_2, что

$$|\mu_{\mathcal{L}u_k}\{[\bar{m}_{k1},\bar{p}_{k1}]\}-\mu_{\mathcal{L}u_0}\{[\bar{m}_{k1},\bar{p}_{k1}]\}|\le\delta/2$$

при всех $k\ge k_2$. Поэтому

$$\mu_{\mathcal{L}u_k}\{[m_k,p_k]\}\le\mu_{\mathcal{L}u_k}\{[\bar{m}_{k_1},\bar{p}_{k_1}]\}\le$$
$$\mu_{\mathcal{L}u_0}\{[\bar{m}_{k_1},\bar{p}_{k_1}]\}\le\delta/2+\delta/2=\delta$$

при $k\ge\max\{k_1,k_2\}$. Итак, $\lim\limits_{k\to\infty}S_k^1=0$. Предельное соотношение $\lim\limits_{k\to\infty}S_k^2=0$ следует из теоремы 4.15.

Очевидно, что

$$S_k^3\le\sup_{\alpha_0\le y\le m_k}|Z^{(l-1)}(x_k-y)-Z^{(l-1)}(x_0-y)|\mu_{\mathcal{L}u_0}\{[\alpha_0,m_k]\}+$$
$$\sup_{m_k\le y\le M_k}|Z^{(l-1)}(p_k-y)|\mu_{\mathcal{L}u_0}\{[m_k,p_k]\}.$$

Вместе с тем

$$\mu_{\mathcal{L}u_0}\{[\alpha_0,m_k]\}\le C$$

при всех $k=1,2,\ldots$ и

$$\lim_{k\to\infty}\mu_{\mathcal{L}u_0}\{[m_k,p_k]\}=0,$$

Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty}S_k^3=0$.

Итак, установлено, что

$$\lim_{k\to\infty}(S_k^1+S_k^2+S_k^3)=0.$$

Пришли к противоречию. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\alpha\le x\le\beta}|w_k^{(l-1)}(x)-w_0^{(l-1)}(x)|=0.$$

Очевидно, что $w_0 = \lim\limits_{k\to\infty} w_k$ в пространстве $\mathcal{D}'(w)$, где $\omega = (\alpha, \beta)$. Так как по предположению $u_0 = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$, то $v_0 = \lim\limits_{k\to\infty} v_k$ в пространстве $\mathcal{D}'(\omega)$. Однако $\mathcal{L}v_k = 0$ при $k = 0, 1, \ldots$ Поэтому $v_0 = \lim\limits_{k\to\infty} v_k$ в пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$.

Полученные утверждения говорят о том, что

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u_0\|_{C^{l-1}[\alpha,\beta]} = 0. \quad \blacksquare$$

Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ – два линейных дифференциальных оператора порядка l. Обозначим через E_1 и E_2 их фундаментальные решения, построенные с помощью функций Z_1 и Z_2.

Пусть $\alpha \in \Omega$. Зададим линейный оператор

$$A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} : L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}} \longrightarrow L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}}$$

по правилу

$$A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} : u(x) \mapsto u(x) + \int_\alpha^x (\mathcal{L}_1 Z_2)(x-y)u(y)dy.$$

Т е о р е м а 5.20. *Отображение*

$$A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} : \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_1}(\Omega) \longrightarrow \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$$

является непрерывным изоморфизмом. При этом диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_1}(\Omega) & \xrightarrow{A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}} & \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_2}(\Omega) \\ & {\scriptstyle \mathcal{L}_1} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \mathcal{L}_2} & \\ & \mathcal{D}'(\Omega) & \end{array}$$

коммутативна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\mathcal{L}_1 v = 0$. Установим, что

$$\mathcal{L}_2 A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} v = 0.$$

Действительно, если

$$\mathcal{L}_1 = \sum_{k=0}^{l} a_k^1 \frac{d^k}{dx^k},$$

то

$$(A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}v)(x) = v(x) + \int\limits_{\alpha}^{x} (\mathcal{L}_1 Z_2)(x-y)v(y)dy =$$

$$v(x) + \int\limits_{\alpha}^{x} \check{\mathcal{L}}_1[Z_2(x-y)]v(x)dy =$$

$$v(x) + \int\limits_{\alpha}^{x} Z_2(x-y)\mathcal{L}_1 v(y)dy +$$

$$\sum_{k=1}^{l} a_k^1 \sum_{i=0}^{k-1} [Z_2^{(i)}(x-\alpha)v^{(k-i-1)}(\alpha) - Z_2^{(i)}(0)v^{(k-i-1)}(x)] =$$

$$v(x) + \int\limits_{\alpha}^{x} Z_2(x-y)\mathcal{L}_1 v(y)dy +$$

$$\sum_{k=1}^{l} a_k^1 \sum_{i=0}^{k-1} [Z_2^{(i)}(x-y)v^{(k-i-1)}(\alpha)] - v(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{l} a_k^1 \sum_{i=0}^{k-1} v^{(k-i-1)}(\alpha)Z_2^{(i)}(x-\alpha),$$

поэтому $\mathcal{L}_2 A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} v = 0$.

2) Пусть $x_0 \in \Omega$. Тогда

$$[A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} E(\cdot - x_0)](x) = E_1(x-x_0) +$$

$$\int\limits_{\alpha}^{x} (\mathcal{L}_1 Z_2)(x-y)E_1(y-x_0)dy =$$

$$E_1(x-x_0) + \int\limits_{\alpha}^{x_0} (\mathcal{L}_1 Z_2)(x-y)E_1(y-x_0)dy +$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} (\mathcal{L}_1 Z_2)(x-y)E_1(y-x_0)dy =$$

$$E_1(x-x_0) + \int\limits_{\alpha}^{x_0} (\mathcal{L}_1 Z_2)(x-y)E_1(y-x_0)dy +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{L}_1 Z_2)(x-y)\theta(x-y)E_1(y-x_0))dy = E_1(x-x_0)+$$

$$\int_{\alpha}^{x_0}(\mathcal{L}_1 Z_2)(x-y)E_1(y-x_0)dy + [((\mathcal{L}_1 Z_2)\theta) * E_1(\cdot - x_0)](x).$$

Так как

$$\begin{gathered}[((\mathcal{L}_1 Z_2)\theta) * E_1(\cdot - x_0)](x) = [(\mathcal{L}_1 E_2 - \delta_0) * E_1(\cdot - x_0)](x) = \\ [(\mathcal{L}_1 E_2) * E_1(\cdot - x_0)](x) - E_1(x - x_0) = \\ [E_2(\mathcal{L}_1 E_1)(\cdot - x_0)](x) - E_1(x - x_0) = \\ [E_2 * \delta_0](x) - E_1(x - x_0) = E_2(x - x_0) - E_1(x - x_0),\end{gathered}$$

то

$$[A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}E_1(\cdot - x_0)](x) = E_2(x - x_0) + \int_{\alpha}^{x_0}(\mathcal{L}_1 Z_2)(x-y)E_1(y-x_0)dy.$$

Вместе с тем

$$\mathcal{L}_2 \int_{\alpha}^{x_0}(\mathcal{L}_1 Z_2)(x-y)E_1(y-x_0)dy = 0,$$

поэтому $A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}E(\cdot - x_0) \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$.

3) Из пп. 1) и 2) следует, что оператор $A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}$ взаимно однозначно отображает линейную полугруппу $\mathcal{L}_1$-положительных $\mathcal{L}_1$-сплайнов с узловыми точками $x_1 < \cdots < x_m$ на линейную полугруппу $\mathcal{L}_2$-положительных $\mathcal{L}_2$-сплайнов с теми же узловыми точками.

4) Так как уравнение

$$A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}u = w$$

является уравнением Вольтерра второго рода, линейный оператор

$$A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} : L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}} \longrightarrow L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}}$$

определяет непрерывный изоморфизм.

5) Пусть $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_1}(\Omega)$. Тогда из теоремы 3.16 следует существование такой последовательности $\mathcal{L}_1$-положительных $\mathcal{L}_1$-сплайнов $u_1, u_2, \ldots,$ что

$$u = \lim_{k\to\infty} u_k$$

в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$. Из вложения

$$\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_1}(\Omega) \subset L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}}$$

вытекает, что этот предел имеет место в пространстве $L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}}$.

Поэтому

$$A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}u = \lim_{k\to\infty} A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}u_k$$

в пространстве $L_2(\Omega)^{\mathrm{loc}}$. Так как $A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}u_k \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$ при $k = 1, 2, \ldots,$ то $A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}u \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$.

Итак, отображение

$$A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} : \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_1}(\Omega) \longrightarrow \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$$

непрерывно. Согласно п. 4) это отображение является мономорфизмом, а п. 3) – эпиморфизмом, поэтому отображение $A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}$ является непрерывным изоморфизмом линейной полугруппы $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_1}(\Omega)$ на линейную полугруппу $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$.

6) Для доказательства коммутативности указанной диаграммы отметим, что из п. 2) следует равенство

$$\mathcal{L}_2 A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}u = \mathcal{L}_1 u$$

для произвольного $\mathcal{L}_1$-положительного $\mathcal{L}_1$-сплайна u. Множество $\mathcal{L}_1$-положительных $\mathcal{L}_1$-сплайнов плотно в линейной полугруппе $\overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$, а все линейные операторы $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ и $A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}$ непрерывны. Поэтому

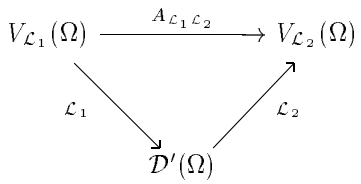
$$\mathcal{L}_2 A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}u = \mathcal{L}_1 u$$

при всех $u \in \overset{+}{\mathcal{D}}{}'_{\mathcal{L}_1}(\Omega)$. ■

С л е д с т в и е. *Отображение*

$$A_{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2} : V_{\mathcal{L}_1}(\Omega) \longrightarrow V_{\mathcal{L}_2}(\Omega)$$

является непрерывным изоморфизмом. При этом диаграмма



коммутативна.

В одномерном случае можно сформулировать эффективно проверяемое достаточное условие остроугольности конуса $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$.

Т е о р е м а 6.20. *Пусть* $b-a<\pi/h(\mathcal{L})$. *Тогда конус* $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ *остроугольный.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – функция Грина дифференциального оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$ на $\Omega=(a,b)$. Тогда при фиксированном $y_0\in\Omega$ функция $u(x)=G(x,y_0)$ является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайном с узловой точкой y_0 и краевыми условиями $u^{(k)}(a)=u^{(k)}(b)=0$ при $k=0,1,\ldots,l-1$.

Пусть

$$\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}=\left(\frac{d}{dx}-\psi_1\right)\left(\frac{d}{dx}-\psi_2\right)\ldots\left(\frac{d}{dx}-\psi_{2l-1}\right)\left(\frac{d}{dx}-\psi_{2l}\right)$$

– факторизация дифференциального оператора $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$, причем

$$\left(\frac{d}{dx}-\psi_1\right)\left(\frac{d}{dx}-\psi_2\right)=\frac{d^2}{dx2}+p\frac{d}{dx}+q,$$

где p и q – вещественные.

Докажем, что $u(x)>0$ при $x\in\Omega$. Допустим, что $u(x_0)=0$ для некоторой точки $x_0\in\Omega$.

Зададим $u_{2l}=u$ и

$$u_i=\left(\frac{d}{dx}-\psi_{i+1}\right)\ldots\left(\frac{d}{dx}-\psi_{2l}\right)u$$

при $i=2,\ldots,2l-1$. Из обобщенной теоремы Ролля следует существование таких точек $\alpha<\beta<\gamma$, что

$$u_2(\alpha)=u_2(\beta)=u_2(\gamma)=0.$$

Очевидно, что $\beta\le y_0$ или $\beta\ge y_0$. Поэтому $u_2(x)=0$ при всех $x\le y_0$ или $u_2(x)=0$ при всех $x\ge y_0$. Пусть для определенности $u_2(x)=0$ при всех $x\le y_0$. Тогда $u_2(x)=E_2(x-y_0)$, где E_2 – фундаментальное решение дифференциального оператора

$$\mathcal{L}_2=\frac{d^2}{dx^2}+p\frac{d}{dx}+q.$$

Непосредственно видно, что $u_2(x)\ge 0$ при $x\in\Omega$ и $u_2(x)>0$ при $x>x_2$, где $x_2=y_0$. Пусть уже доказано, что $u_i(x)\ge 0$ при $x\in\Omega$ и $u_i(x)>0$ при $x>x_i$. Тогда

$$\left(\frac{d}{dx}-\psi_{i+1}\right)u_{i+1}=u_i.$$

Однако функция u_{i+1} обращается в нуль в некоторой точке $\alpha_{i+1} \in \Omega$, поэтому

$$u_{i+1}(x) = \int\limits_{\alpha_{i+1}}^{x} u_i(t) \exp\left[\int\limits_{t}^{x} \psi_{i+1}(\tau) d\tau\right] dt.$$

Отсюда следует, что $u_{i+1}(x) \geq 0$ при $x \in \Omega$ и $u_{i+1}(x) > 0$ при $x > x_{i+1}$, где $x_i < x_{i+1} < b$.

Итак, $u(b) = u_{2l}(b) > 0$. Полученное противоречие доказывает, что $u(x) \neq 0$ при всех $x \in \Omega$. Так как $u(y_0) > 0$, то $u(x) > 0$ при всех $x \in \Omega$, поэтому функция Грина $G(x, y)$ положительна. Согласно теореме 2.5 конус $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ остроугольный. ■

Пусть дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ имеет только вещественные характеристические числа. Тогда из теоремы 6.20 следует, что конус $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ остроугольный для любого отрезка $\Omega \subset \mathbb{R}$. Поэтому для любого отрезка $\Omega \subset \mathbb{R}$ конус $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ является воспроизводящим в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$.

Пусть вновь $\mathcal{L}$ – произвольный линейный дифференциальный оператор порядка l. Из воспроизводимости конуса $\overset{+}{W}{}_2^l(\Omega)$ следует нормальность конуса $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$, поэтому $\cos[K_{\mathcal{L}}(\Omega)] > -1$. Нормальность конуса $K_{\mathcal{L}}(\Omega)$ следует из теоремы 2.18.

Пусть $S \subset \Omega$ – замкнутое подмножество и $0 \leq \lambda \leq \infty$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\|u - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[u \in V_{\mathcal{L}}^{\lambda}(\Omega, S)]{} \min,$$

где $u_0 \in L_2(\Omega)$. С этой целью повторим формулировку теоремы 4.19 в одномерном случае.

Пусть $0 \leq \tau \leq \infty$. Для любой функции $U_0 \in W_2^l(\Omega)$ существует и единственна $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-положительная функция $U_\tau^0 \in W_2^l(\Omega)$, удовлетворяющая краевым условиям

$$U_\tau^{0(k)}(a) = U_0^{(k)}(a),$$
$$U_\tau^{0(k)}(b) = U_0^{(k)}(b)$$

при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$, неравенству

$$U_\tau^0|_S \geq U_0|_S$$

и включению

$$\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}} U_\tau^0 \subset \{x \in S : U_\tau^0(x) = U_0(x) - \tau\}.$$

Функция U_τ^0 является решением задачи

$$\|\mathcal{L}U\|_{L_2(\Omega)}^v \longrightarrow \min$$

в классе функций $U \in W_2^l(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$U_\tau^{(k)}(a) = U_0^{(k)}(a),$$
$$U_\tau^{(k)}(b) = U_0^{(k)}(b)$$

при всех $k = 0, 1, \ldots, l-1$ и неравенству

$$U|_S \geq U_0|_S.$$

Если $U_0 = \check{E} * u_0$, где $u_0 \in L_2(\Omega)$, то функция $u_\tau^0 = \check{\mathcal{L}} U_\tau^0$ является решением задачи минимизации

$$\|u - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[u \in V_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega, S)]{} \min,$$

где $\lambda = \mu_{\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U_\tau^0}\{\Omega\}$.

Т е о р е м а 7.20. *Существует такое открытое множество* $\omega \subset \Omega$, *что* $\mathcal{L}u_\tau^0(x) = 0$ *при всех* $x \in \omega$ *и* $u_\tau^0(x) = u_0(x) - a_0\tau$ *при почти всех* $x \in \Omega\backslash\omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\tau = \infty$, то $\omega = \Omega$. Пусть $\tau < \infty$. Докажем одно утверждение вспомогательного характера.

1) Если $U \in W_2^l(\Omega)$ и $1 \leq k \leq l$, то $U^{(k)}(x) = 0$ при почти всех x из множества $F_0 = \{x \in \Omega : U(x) = 0\}$.

Действительно, пусть $\alpha, \beta \in F_0$ и $\alpha \leq \beta$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta U'(x)dx = U(\beta) - U(\alpha) = 0.$$

Зададим функцию

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in F_0, \\ U'(x) & \text{при } x \in \Omega\backslash F_0, \end{cases}$$

Тогда

$$\int_\alpha^\beta V(x)dx = 0$$

при всех $\alpha, \beta \in \Omega$ и $\alpha \leq \beta$. Поэтому $V(x) = 0$ при почти всех $x \in \Omega$. Отсюда следует, что $U'(x) = 0$ при почти всех $x \in F_0$.

Если $l = 1$, то утверждение доказано. Пусть $l \geq 2$. Зададим $F_1 = \{x \in \Omega : U'(x) = 0\}$, тогда $F_0 = F_1 \cup A_0$, где мера множества A_0 равна нулю и $F_1 \cap A_0 = \varnothing$. Поскольку $U' \in W_2^{l-1}(\Omega)$, из доказанного выше следует, что $U''(x) = 0$ при почти всех $x \in F_1$. Продолжая аналогичным образом, приходим к доказательству утверждения.

2) Зададим

$$\omega = (\Omega \backslash S) \bigcup \{x \in S : U_\tau^0(x) > U_0(x) - \tau\}.$$

Равенство $\mathcal{L}u_\tau^0(x) = 0$ при всех $x \in \omega$ следует из равенства $u_\tau^0 = \check{\mathcal{L}}U_\tau^0$ и включения

$$\operatorname{supp} \mathcal{L}\check{\mathcal{L}}U_\tau^0 \subset \{x \in S : U_\tau^0(x) = U_0(x) - \tau\}.$$

Очевидно, что

$$\Omega \backslash \omega = \{x \in S : U_\tau^0(x) = U_0(x) - \tau\}.$$

Поэтому из п. 1) имеем, что при почти всех $x \in \Omega \backslash \omega$

$$U_\tau^{0(k)}(x) = U_0^{(k)}(x),$$

где $1 \leq k \leq l$. ■

Далее будем предполагать, что $a_0 = 0$. Тогда функция u_τ^0 удовлетворяет равенству $\mathcal{L}u_\tau^0 = 0$ в открытом множестве $\omega \subset \Omega$ и почти везде совпадает с функцией u_0 в замкнутом множестве $F = \Omega \backslash \omega$.

Т е о р е м а 8.20. *Пусть многочлен $\mathcal{Q}$ является делителем многочлена $\mathcal{L}$ и функция u_0 является $\mathcal{Q}$-сплайном. Тогда функция u_τ^0 является $\mathcal{L}$-сплайном.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a < x_1 < \cdots < x_k < b$ – узловые точки $\mathcal{Q}$-сплайна u_0 и $x_0 = a, x_{k+1} = b$. Тогда функция $U_0 - \tau$ является $\mathcal{Q}\check{\mathcal{L}}$-сплайном с теми же самыми узловыми точками. Зададим $U = U_\tau^0 - U_0 + \tau$. Очевидно, что $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}(U_0 - \tau) = 0$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Из теоремы 2.20 следует, что множество $\{x \in [x_i, x_i{+}1] : U(x) = 0\}$ образовано из конечного числа изолированных отрезков и точек, согласно теореме 7.20 функция U является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайном на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Отсюда вытекает, что функция U является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайном на $[a, b]$. Поэтому функция U_τ^0 является $\mathcal{L}\check{\mathcal{L}}$-сплайном на $[a, b]$. Тогда функция $u_\tau^0 = \check{\mathcal{L}}U_\tau^0$ – $\mathcal{L}$-сплайн на $[a, b]$. ■

В заключение параграфа рассмотрим два примера решения задачи:

$$\|u - u_0\|_{L_2(\Omega)} \xrightarrow[u \in V_{\mathcal{L}}^\lambda(\Omega, S)]{} \min.$$

Будем для простоты предполагать, что $S = \Omega$ и $\lambda = \infty$. В первом примере будет $\mathcal{L} = d/dx$, поэтому будет изложено решение задачи

среднеквадратической аппроксимации возрастающими функциями, а во втором примере $\mathcal{L} = d^2/dx^2$, поэтому будет изложено решение задачи среднеквадратической аппроксимации выпуклыми функциями.

П р и м е р 1. При $\mathcal{L} = d/dx$ имеем $E = \theta$. Далее последовательно применяем алгоритм, изложенный в §18.

1) Функция

$$U_0(x) = \int_x^b u_0(y)dy.$$

2) Функция U^0 должна быть вогнутой на отрезке $[a, b]$, удовлетворять краевым условиям

$$U^0(a) = U_0(a),$$
$$U^0(b) = U_0(b),$$

неравенству

$$U^0 \geq U_0$$

и равенству

$$-U^{0\prime\prime}(x) = 0$$

при $U^0(x) > U_0(x)$.

3) Функция

$$u^0 = -U^{0\prime}.$$

Из п. 2) следует, что функция U^0 является нижней огибающей всех вогнутых функций, расположенных на отрезке $[a, b]$ выше функции U_0.

Действительно, при $U^0 = U_0$ все очевидно. Если $U^0 \neq U_0$, то множество $\{x \in [a, b] : U^0(x) > U_0(x)\}$ открыто на вещественной прямой. Пусть (α, β) – составляющий интервал этого открытого множества. Тогда $U^0(\alpha) = U_0(\alpha)$, $U^0(\beta) = U_0(\beta)$ и на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция U^0 является линейной:

$$U^0(x) = U_0(\alpha)\frac{\beta - x}{\beta - \alpha} + U_0(\beta)\frac{\alpha - x}{\alpha - \beta}.$$

Пусть теперь U – произвольная вогнутая функция, расположенная на отрезке $[a, b]$ выше функции U_0. Тогда $U(\alpha) \geq U^0(\alpha)$, $U(\beta) \geq U^0(\beta)$. Из линейности функции U^0 на отрезке $[\alpha, \beta]$ следует, что $U(x) \geq U^0(x)$ при всех $x \in [\alpha, \beta]$. Из произвольности составляющего интервала (α, β) получаем $U(x) \geq U^0(x)$ при всех $x \in [a, b]$. Поэтому

функция U^0 служит нижней огибающей всех вогнутых функций, расположенных выше функции U_0.

Из построения функции U^0 можно вывести несколько полезных следствий.

Во-первых, если функция u_0 кусочно-постоянная, то функция u также кусочно-постоянная, причем точки разрыва функции u^0 содержатся среди точек разрыва функции u_0.

Во-вторых, функция u^0 непрерывна, если функция u_0 непрерывна.

В-третьих, на составляющем интервале (α, β) открытого множества $\{x \in [a,b] : U^0(x) > U_0(x)\}$ функция u^0 постоянна и имеет значение

$$u^0(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta u_0(y)dy.$$

Поэтому на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция u^0 совпадает с той постоянной функцией, которая дает наилучшее среднеквадратичное приближение функции u_0.

П р и м е р 2. Если $\mathcal{L} = d^2/dx^2$, то $E = x\theta$, поэтому

$$U_0(x) = \int_x^b (y - x)u_0(y)dy.$$

Не будем столь же подробно обсуждать алгоритм построения функции u^0, как это было сделано в предыдущем примере, а только отметим наиболее важные моменты.

Пусть функция u_0 является кусочно-линейной, т.е. является d/dx-сплайном. Поэтому согласно теореме 10.20 функция u^0 является d/dx-сплайном, поэтому функция u^0 также кусочно-линейная. В этом можно усмотреть аналогию со случаем $\mathcal{L} = d/dx$. Однако в рассматриваемом случае $\mathcal{L} = d^2/dx^2$ узловые точки кусочно-линейных функций u^0 и u_0 не обязаны совпадать.

Пусть функция u^0 построена. Если (α, β) – составляющий интервал открытого множества $\{x \in [a,b] : U^0(x) > U_0(x)\}$, то $U^0(\alpha) = U_0(\alpha)$, $U^0(\beta) = U_0(\beta)$ и $U^{0\prime}(\alpha) = U_0'(\alpha)$, $U^{0\prime}(\beta) = U_0'(\beta)$. Из этих соотношений следует, что

$$\int_\alpha^\beta u^0(y)dy = \int_\alpha^\beta u_0(y)dy,$$

$$\int_\alpha^\beta yu^0(y)dy = \int_\alpha^\beta yu_0(y)dy$$

Поэтому на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция u^0 совпадает с линейной функцией, дающей наилучшее среднеквадратическое приближение функции u_0.

§21. Фильтрация с дифференциальными ограничениями

Пусть задан "полезный сигнал" $u_* \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)$, возмущенный аддитивной "помехой" ξ. Предполагается, что помеха ξ является случайной величиной в $L_2(\Omega)$, удовлетворяющей неравенству

$$\mathbb{M}\|\xi\|^2_{L_2(\Omega)} < \infty.$$

Требуется, зная "возмущенный сигнал"

$$u_0 = u_* + \xi,$$

отфильтровать помеху ξ и по возможности более точно восстановить полезный сигнал u_*.

Поскольку $u_* \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)$, естественно за оценку u^0 полезного сигнала u_* взять

$$u^0 = \mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_* + \xi).$$

Априорное неравенство

$$\mathbb{M}\|\mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_* + \xi) - u_*\|_{L_2(\Omega)} \le \mathbb{M}\|\xi\|_{L_2(\Omega)}$$

говорит о том, что предполагаемый способ восстановления полезного сигнала u_* является достаточно разумным.

Более точный результат может быть получен из теоремы 1.7, из которой следует асимптотическое представление

$$\mathbb{M}\|\mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_* + \lambda\xi) - u_*\|_{L_2(\Omega)} = \mathbb{M}\|\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)\{u_*\}}(\xi)\|\lambda + o(\lambda).$$

Отметим, что

$$\mathbb{M}\|\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\, V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)\{u_*\}}(\xi)\|_{L_2(\Omega)} \le \mathbb{M}\|\xi\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из указанного выше асимптотического представления видно, что фильтр

$$\Phi = \mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}$$

наиболее плохо восстанавливает те полезные сигналы u_*, которые удовлетворяют равенству

$$\mathrm{Cl}\, V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)\{u_*\} = L_2(\Omega).$$

Действительно, в этом случае

$$\mathbb{M}\|\mathfrak{P}_{\mathrm{Cl}\,V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)\{u_*\}}(\xi)\|_{L_2(\Omega)} = \mathbb{M}\|\xi\|_{L_2(\Omega)}.$$

Опишем теперь класс помех ξ, который в дальнейшем будет использоваться для иллюстрации возможностей предлагаемого метода фильтрации.

Пусть область Ω разбита на m непересекающихся подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ и заданы m числовых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. Множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ предполагаются измеримыми. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_m$ предполагаются независимыми, ограниченными $|\xi_i| \le \Xi$ и имеющими нулевые математические ожидания $\mathbb{M}\xi_i = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

Случайную величину

$$\xi = \xi_1 \chi_{\Omega_1} + \cdots + \xi_m \chi_{\Omega_m}$$

будем называть ступенчатой. Зададим

$$r(\xi) = \max\{\upsilon\{\Omega_1\}, \ldots, \upsilon\{\Omega_m\}\},$$

где υ – мера Лебега.

Содержательно случайную величину ξ можно истолковывать как ошибку измерения полезного сигнала на множестве Ω. Покажем, что в случае ступенчатых случайных помех близость полезного и восстановленного сигналов определяется малостью величины $r(\xi)$.

Пусть $\xi^1, \xi^2, \ldots$ – такая последовательность ступенчатых случайных величин, что

$$\lim_{k\to\infty} r(\xi^k) = 0.$$

Предполагается, что постоянная Ξ, фигурирующая в определении ступенчатой случайной величины, едина для всех $k = 1, 2, \ldots$

Т е о р е м а 1.21. *Пусть $\varepsilon > 0$. Имеет место соотношение:*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{\|\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\xi^k)\|_{L_2(\Omega)} \le \varepsilon\} = 1$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\omega \subset \Omega$. Докажем существование такой постоянной $C(\omega)$, что

$$\mathbb{M}\|\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\xi)\|^2 \le \Xi^2(\nu\{\Omega\backslash\omega\} + C(\omega)r(\xi)). \tag{1.21}$$

Для любой ступенчатой величины

$$\xi = \xi_1 \chi_{\Omega_1} + \cdots + \xi_k \chi_{\Omega_k}.$$

Действительно, представим случайную величину ξ в виде $\xi = \eta + \zeta$, где

$$\eta = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \chi_{\Omega_i \setminus \omega}, \quad \zeta = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \chi_{\Omega_1 \cap \omega}.$$

Из линейности оператора $\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}$ имеем

$$\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\xi) = \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\eta) + \mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\zeta).$$

Поэтому для доказательства неравенства (1.21) достаточно должным образом оценить слагаемые, стоящие в правой части последнего равенства.

Так как

$$\|\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\eta)\|_{L_2(\Omega)} \leq \|\eta\|_{L_2(\Omega)},$$

то имеет место неравенство

$$\mathbb{M}\|\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\eta)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \mathbb{M}\|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} = \mathbb{M}\|\sum_{i=1}^{m} \xi_i \chi_{\Omega_i \setminus \omega}\|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbb{M}\xi_i^2 \nu\{\Omega_i \setminus \omega\} = \Xi^2 \nu\{\Omega \setminus \omega\}.$$

Пусть ρ – расстояние от $\mathrm{Cl}\,\omega$ до $\partial\Omega$. Зададим

$$\omega_0 = \cup_{x \in \omega} \mathbb{D}^n(x, \rho/2).$$

Пусть пробная функция $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ равна 1 в окрестности ω_0 множества ω. Зададим $\psi = 1 - \varphi$. Из теоремы 4.12 имеем

$$\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\xi) = \mathcal{L} A_\Omega[\psi(\check{E} * \zeta)|_\Omega],$$

где линейный оператор

$$A_\Omega : W_2^l(\Omega) \longrightarrow W_2^l(\Omega)$$

непрерывен, однако

$$\psi(x)(\check{E} * \chi_{\Omega_i \cap \omega})(x) = \psi(x) \int\limits_{\Omega_i \cap \omega} E(y - x) dy.$$

Поэтому существует такая постоянная $C(\omega)$, что

$$\|\psi(\check{E} * \chi_{\Omega_1 \cap \omega})|_\Omega\|_{C^l(\mathrm{Cl}\,\Omega)} \leq C(\omega) \nu\{\Omega_i \cap \omega\}$$

при всех $1 \le i \le m$. Отсюда следует существование такой постоянной $C(\omega)$, что выполняется неравенство

$$\|\mathcal{L}A_\Omega[\psi(\check{E} * \chi_{\Omega_i \cap \omega})|_\Omega]\|^2_{L_2(\Omega)} \le C(\omega)\nu\{\Omega_i \cap \omega\}^2$$

при всех $1 \le i \le m$.

Итак,

$$\mathbb{M}\|\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\xi)\|^2_{L_2(\Omega)} = \mathbb{M}\|\mathcal{L}A_\Omega[\psi(\check{E} * \zeta)|^v_\Omega]\|^2_{L_2(\Omega)} =$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mathbb{M}(\xi_i \xi_j)(\mathcal{L}A_\Omega[\psi(\check{E} * \chi_{\Omega_i \cap \omega})|_\Omega], \mathcal{L}A_\Omega[\psi(\check{E} * \chi_{\Omega_j \cap \omega})|_\Omega])^2 =$$

$$\sum_{i=1}^m \mathbb{M}(\xi_i^2)\|\mathcal{L}A_\Omega[\psi(\check{E} * \chi_{\Omega_i \cap \omega})|_\Omega\|^2 =$$

$$\Xi^2 C(\omega) \sum_{i=1}^m \nu\{\Omega_i \cap \omega\}^2 \le \Xi^2 C(\omega) r(\xi).$$

Полученные оценки обеспечивают доказательство неравенства (1.21). ∎

2) Зададим

$$\rho_k = \|\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\xi^k)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Докажем, что $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbb{M}\rho_k = 0$. Из п. 1) следует, что $\mathbb{M}\rho_k^2 \le \Xi^2(\nu\{\Omega \backslash \omega\} + C(\omega) r(\xi^k))$. Пусть $\delta > 0$. Подберем $\omega \subset\subset \Omega$ так, что $\Xi^2 \nu\{\Omega \backslash \omega\} \le \delta/2$. Далее подберем k_0 так, что $\Xi^2 C(\omega) r(\xi^k) \le \delta/2$ при всех $k \ge k_0$. Тогда $\mathbb{M}\rho_k^2 \le \delta$ при всех $k \ge k_0$. Очевидно, что $\mathbb{M}\rho_k \le (\mathbb{M}\rho_k^2)^{1/2}$, $\mathbb{D}\rho_k \le \mathbb{M}\rho_k^2$, поэтому из неравенства Чебышева следует оценка

$$\mathbb{P}\{\rho_k \ge \varepsilon\} \le \mathbb{P}\{|\rho_k - \mathbb{M}\rho_k| \ge \varepsilon - \mathbb{M}\rho_k\} \le$$
$$\mathbb{D}\rho_k (\varepsilon - \mathbb{M}\rho_k)^{-2} \le \mathbb{M}\rho_k^2 (\varepsilon - (\mathbb{M}\rho_k^2) m^{1/2})^{-2},$$

завершающая доказательство теоремы. ∎

Пусть $S \subset \Omega$ – компактное подмножество.

Т е о р е м а 2.21. *Пусть $\varepsilon > 0$. Имеет место соотношение:*

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{P}\{\|\mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega, S)}(\xi^k)\|_{L_2(\Omega)} \le \varepsilon\} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Установим, что для любого $\lambda > 0$ имеет место предел

$$\lim_{k \to \infty} \mathbb{P}\{\max_{x \in S} |(\check{E} * \xi^k)(x)| \le \lambda\} = 1. \qquad (2.21)$$

Действительно, пусть $x_0 \in S$. Тогда

$$(\check{E} * \xi^k)(x_0) = \sum_{i=1}^{m_k} \xi_i^k \int\limits_{\Omega_i} E(y - x_0)dy,$$

поэтому

$$\mathbb{M}(\check{E} * \xi^k)(x_0) = 0,$$

$$\mathbb{D}(\check{E} * \xi^k)(x_0) = \sum_{i=1}^{m_k} \mathbb{D}\xi_i^k \Big(\int\limits_{\Omega} E(y - x_0)dy\Big)^2 \leq$$

$$\Xi^2 \sum_{i=1}^{m_k} \nu\{\Omega_i^k\} \int\limits_{\Omega_i^k} E(y - x_0)^2 dy \leq \Xi^2 r(\xi^k) \int\limits_{\Omega} E(y - x_0)^2 dy.$$

Используя неравенство Чебышева, получаем

$$\mathbb{P}\{|(\check{E} * \xi^k)(x_0)| \leq \lambda/2\} \geq 1 - Cr(\xi^k)/\lambda^2,$$

где

$$C = 4\Xi^2 \max_{x \in S} \int\limits_{\Omega} E(y - x)^2 dy.$$

Выберем такое $\delta > 0$ чтобы из неравенства $\|x^1 - x^2\| \leq \delta$, где $x^1, x^2 \in S$, следовало бы неравенство

$$\Xi \int\limits_{\Omega} |E(y - x^1) - E(y - x^2)|dy \leq \lambda/2.$$

Построим в множестве S конечную δ-сеть $x^1, x^2, \ldots, x^q$. Тогда для любого $x \in S$ существует такое x^j, что

$$|(\check{E} * \xi^k)(x) \leq |(\check{E} * \xi^k)(x^j)| + \big|(\check{E} * \xi^k)(x) - (\check{E} * \xi^k)(x^j)\big| \leq$$

$$|(\check{E} * \xi^k)(x^j)| + \left|\sum_{i=1}^{m_k} \xi_i^k \int\limits_{\Omega_i^k} (E(y - x) - E(y - x^j))dy\right| \leq$$

$$|(\check{E} * \xi^k)(x^j)| + \Xi \int\limits_{\Omega} |E(y - x) - E(y - x^j)|dy \leq |(\check{E} * \xi^k)(x^j)| + \lambda/2.$$

Поэтому

$$\mathbb{P}\{\max_{x\in S}|(\check{E}*\xi^k)(x)|\le\lambda\}\ge\mathbb{P}\{\max_{1\le j\le q}|(\check{E}*\xi^k)(x^j)|\le\lambda/2\}\ge$$
$$\sum_{j=1}^{q}\mathbb{P}\{|(\check{E}*\xi^k)(x^j)|\le\lambda/2\}-q+1\ge 1-Cqr(\xi^k)/\lambda^2.$$

Предельное соотношение (2.21) доказано.

2) Поскольку

$$\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(\xi^k)=\xi^k-\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\xi^k),$$

имеет место неравенство

$$\mathbb{P}\left\{\max_{x\in S}|(\check{E}*\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(\xi^k))(x)|\le\lambda\right\}\ge$$
$$\mathbb{P}\left\{\max_{x\in S}|(\check{E}*\xi^k)(x)|\le\lambda/2\right\}+$$
$$\mathbb{P}\left\{\max_{x\in S}|(\check{E}*\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(\xi^k))(x)|\le\lambda/2\right\}-1.$$

Поэтому из п. 1) теоремы 2.21 и теоремы 1.12 получаем

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}\left\{\max_{x\in S}|(\check{E}*\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(\xi^k))(x)|\le\lambda\right\}=1.$$

Пусть пробная функция $V\in C_0^{\infty}(\Omega)$ равна 1 в некоторой окрестности множества S. Тогда очевидно, что

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}\left\{(\check{E}*\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(\xi^k))|_S\le\lambda V|_S\right\}=1.$$

Если $v=\mathcal{L}V$, то $V=\check{E}*v$ и из теоремы 1.19 имеем

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}\left\{\lambda v\in\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(\xi^k)+V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)^*\right\}=1.$$

Пусть $u_0=\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(\xi^k)$ и $u=\lambda v$, тогда из неравенства (5.3) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}\left\{\|\mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(\xi^k))\|_{L_2(\Omega)}\le\lambda\|v\|_{L_2(\Omega)}\right\}=1.$$

Заметим, что

$$\mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(\xi^k))=\mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(\xi^k).$$

Зададим

$$\lambda=\varepsilon/\|v\|_{L_2(\Omega)},$$

тогда

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left\{\|\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\xi^k)\|_{L_2(\Omega)} \le \varepsilon\right\} = 1. \quad \blacksquare$$

Т е о р е м а 3.21. *Пусть* $u_* \in V_{\mathcal{L}}(\Omega, S)$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{\|\mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_* + \xi^k) - u_*\|_{L_2(\Omega)} \le \varepsilon\} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Легко видеть, что

$$\|\mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_* + \xi^k) - u_*\|_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\|\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)}(\xi^k)\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_* + \xi^k) -$$
$$\mathfrak{P}_{P_{\mathcal{L}}(\Omega)^{\perp}}(u_*)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Поэтому из теоремы 1.21 следует, что для доказательства сформулированного утверждения достаточно доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left\{\|\mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_* + \xi^k) - u_*\|_{L_2(\Omega)} \le \varepsilon\right\} = 1, \qquad (3.21)$$

где $u_* \in K_{\mathcal{L}}(\Omega, S)$.

2) Докажем, что для любого $\lambda > 0$ имеет место предел

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{|(u_*, \xi^k)_{L_2(\Omega)}| \le \lambda\} = 1.$$

Действительно,

$$\mathbb{M}(u_*, \xi^k)_{L_2(\Omega)} = 0,$$
$$\mathbb{D}(u_*, \xi^k)_{L_2(\Omega)} = \mathbb{D}\sum_{i=1}^{m_k} \xi_i^k \int\limits_{\Omega_i^k} u_*(y)dy =$$
$$\sum_{i=1}^{m_k} \mathbb{D}\xi_i^k \Big(\int\limits_{\Omega_i^k} u_*(y)dy\Big)^2 \le$$
$$\Xi^2 \sum_{i=1}^{m_k} \nu\{\Omega_i^k\} \int\limits_{\Omega_i^k} u_*(y)^2 dy \le$$
$$\Xi^2 \|u_*\|_{L_2(\Omega)} r(\xi^k),$$

поэтому

$$\mathbb{P}\{|(u_*, \xi^k)_{L_2(\Omega)}| \le \lambda\} \ge 1 - \Xi^2 \|u_*\|^2_{L_2(\Omega)} r(\xi^k)/\lambda^2,$$

откуда и вытекает требуемый предел.

3) Используя неравенство (7.3), имеем

$$\mathbb{P}\left\{\|\mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_*+\xi^k)-u_*\|_{L_2(\Omega)}\le\varepsilon\right\}\ge$$
$$\mathbb{P}\left\{(u_*,\mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(\xi^k)-\xi^k)_{L_2(\Omega)}\le\varepsilon^2/2\right\}+$$
$$\mathbb{P}\left\{\|\mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(\xi^k)\|_{L_2(\Omega)}\le\varepsilon/2\right\}-1\ge$$
$$\mathbb{P}\left\{\|u_*\|_{L_2(\Omega)}\|\mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(\xi^k)\|_{L_2(\Omega)}\le\varepsilon^2/8\right\}+$$
$$\mathbb{P}\left\{|(u_*,\xi^k)_{L_2(\Omega)}|\le\varepsilon^2/8\right\}+$$
$$\mathbb{P}\left\{\|\mathfrak{P}_{K_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(\xi^k)\|_{L_2(\Omega)}\le\varepsilon/2\right\}-2.$$

Поэтому из теоремы 2.21 и п. 2) следует (3.21). ■

С л е д с т в и е. *Пусть $l>n$. Тогда для любой области $\omega\subset\Omega$ имеет место предел*

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}\left\{\|\mathfrak{P}_{V_{\mathcal{L}}(\Omega,S)}(u_*+\xi^k)-u_*\|_{C^{l-n-1}(\mathrm{Cl}\,\omega)}\le\varepsilon\right\}=1.$$

В заключение этого параграфа изложим два численных эксперимента. В этих экспериментах $n=1$, $\Omega=(-1,1)$ и $S=(-1,1)$.

П р и м е р 1. Пусть $\mathcal{L}=d/dx$. Это означает, что полезный сигнал u_* – возрастающая функция.

Пусть независимые случайные величины $\xi_1,\xi_2,\ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $(-1/2,1/2)$, а

$$\xi(x)=\sum_{i=1}^{100}\xi_i\chi_{[(i-1)/50,i/50-1]}(x).$$

Пусть полезный сигнал u_* имеет вид ступеньки: $u_*(x)=\theta(x)/2$. Восстановленный сигнал $u^0=\mathfrak{P}_{V_{d/dx}(\Omega)}(u_*+\xi)$ изображен на рис. 2 жирной линией. Близость восстановленного и полезного сигналов в точках непрерывности полезного сигнала очевидна.

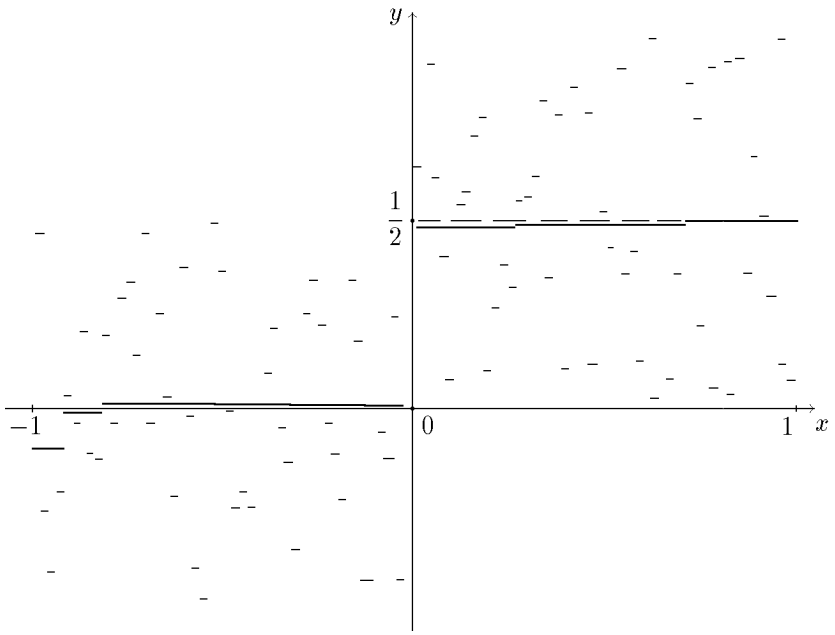


Рис. 2

П р и м е р 2. Пусть $\mathcal{L} = d^2/dx^2$. Это означает, что полезный сигнал u_* – выпуклая функция.

Независимые случайные величины такие же, как в примере 1, а

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{100} \left\{ \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{50}(x - (i-1)/50 + 1) + \xi_{i-1} \right\} \chi_{[(i-1)/50,\, i/50-1]}(x).$$

Пусть полезный сигнал u_* имеет вид уголка: $u_*(x) = |x|$. Восстановленный сигнал $u^0 = \mathfrak{P}_{V_{d^2/dx^2}(\Omega)}(u_* + \xi)$ изображен на рис. 3 жирной л

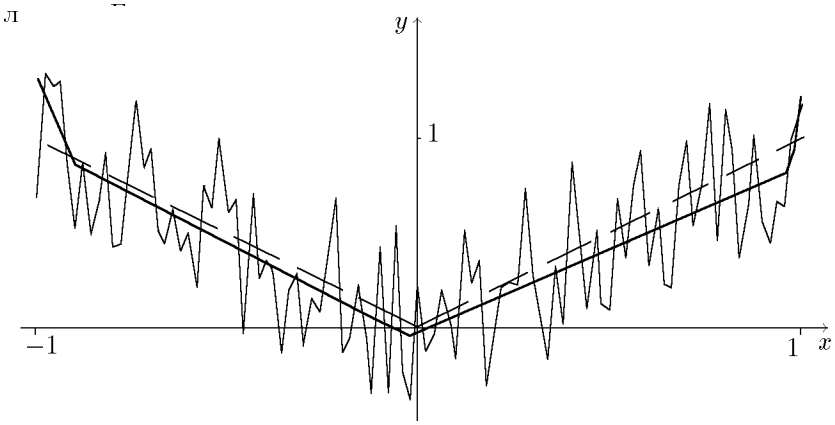


Рис. 3