О. Б. Арушанян

СИММЕТРИЧНЫЕ ЯКОБИЕВЫ МАТРИЦЫ С ОДИНАКОВЫМИ ДИАГОНАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Предлагается набор тестов, составленных для симметричных якобиевых матриц [1] порядка n с одинаковыми диагональными элементами, имеющих вид ($c \neq 0$)

$$A_n = \begin{pmatrix} d & c & & & & \\ c & d & c & & & \\ & c & d & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & d & c \\ & & & & c & d \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Вычисление рассматриваемых здесь характеристик матрицы (1) проводится с использованием стандартных приемов решения разностных уравнений. Это важно в методическом отношении, поскольку подчеркивается глубокая взаимосвязь численных методов линейной алгебры и разностных методов решения задач математической физики [2]. Результаты, полученные в общем виде, иллюстрируются примером одного типа матриц, который часто встречается в практических расчетах.

1. Вычисление определителя

Получим рекуррентное соотношение для определителя матрицы (1). Для этого разложим определитель по первой строке:

$$\det(A_n) = d\det(A_{n-1}) + (-1)^3 c \begin{vmatrix} c & c & & & & \\ & d & c & & & \\ & c & d & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & d & c \\ & & & & c & d \end{vmatrix}.$$

Разложив последний определитель по первому столбцу, получим искомое рекуррентное соотношение:

$$\det(A_n) = d\det(A_{n-1}) - c^2\det(A_{n-2}).$$

Положим $n = n+2$. Тогда для вычисления $\det(A_n)$ имеем разностное уравнение

$$\det(A_{n+2}) - d\det(A_{n+1}) + c^2\det(A_n) = 0$$

с начальными условиями

$$\det(A_1) = d, \quad \det(A_2) = d^2 - c^2.$$

Характеристическое уравнение

$$q^2 - dq + c^2 = 0$$

имеет корни

$$q_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2-4c^2}}{2}.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $q_1 = q_2$, т.е. $|d| = 2\,|c|$. Тогда общее решение выписанного разностного уравнения имеет вид

$$\det(A_n) = a\,q_1^n + b\,n\,q_1^n = q_1^n(a+bn).$$

Из начальных условий найдем, что $a = b = 1$. Таким образом, для рассматриваемого случая $q_1 = \dfrac{d}{2}$ и определитель матрицы (1) вычисляется по формуле

$$\det(A_n) = \left(\frac{d}{2}\right)^n (1+n). \tag{2}$$

Отсюда видно, что в соответствии с критерием Сильвестра матрица (1) при $|d| = 2\,|c|$ положительно определена, если $d > 0$, и отрицательно определена, если $d < 0$.

2) Пусть теперь $q_1 \neq q_2$, т.е. $|d| \neq 2\,|c|$. Тогда общее решение разностного уравнения имеет вид

$$\det(A_n) = \alpha\, q_1^n + \beta\, q_2^n.$$

Для определения α и β выпишем из начальных условий линейную систему из двух уравнений

$$\begin{aligned}\det(A_1) &= d = \alpha\, q_1 + \beta\, q_2,\\ \det(A_2) &= d^2 - c^2 = \alpha\, q_1^2 + \beta\, q_2^2,\end{aligned}$$

решением которой являются

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{d^2 - c^2 - dq_2}{q_1^2 - q_1 q_2} = \frac{q_1^2}{q_1^2 - q_1 q_2} = \frac{q_1}{q_1 - q_2},\\ \beta &= \frac{d^2 - c^2 - dq_1}{q_2^2 - q_1 q_2} = \frac{q_2^2}{q_2^2 - q_1 q_2} = \frac{q_2}{q_2 - q_1}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\det(A_n) = \frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_1 - q_2}. \tag{3}$$

Поскольку $q_1 - q_2 = \sqrt{d^2 - 4c^2}$, то

$$\det(A_n) = \frac{\left(d + \sqrt{d^2 - 4c^2}\right)^{n+1} - \left(d - \sqrt{d^2 - 4c^2}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{d^2 - 4c^2}}.$$

Если $d^2 > 4c^2$, то из последней записи следует, что по критерию Сильвестра матрица (1) положительно определена, если $d > 0$, и отрицательно определена, если $d < 0$.

Если $d = 0$, то

$$\det(A_n) = \frac{\left(\sqrt{-4c^2}\right)^{n+1} - \left(-\sqrt{d^2 - 4c^2}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{-4c^2}} = i^n |c|^n \left(\frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}\right).$$

Следовательно, при $d = 0$ матрица (1) вырождена для нечетных n и не вырождена для четных n.

Если $d^2 < 4c^2$, то выражение (3) можно записать по-другому. Преобразуем корни характеристического уравнения следующим образом:

$$q_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4c^2}}{2} = \frac{d \pm 2|c|\sqrt{(d/2c)^2 - 1}}{2} = \frac{d}{2} \pm |c|\sqrt{\left(\frac{d}{2c}\right)^2 - 1} = c\,\frac{d}{2c} \pm i|c|\sqrt{1 - \left(\frac{d}{2c}\right)^2}.$$

Поскольку $|d/2c| < 1$, то обозначим $\cos\varphi = \dfrac{d}{2c}$; тем самым, эти корни могут быть записаны в нормальной тригонометрической форме в виде

$$\begin{aligned}q_{1,2} &= c\,(\cos\varphi \pm i\sin\varphi), \quad \text{если} \quad c > 0,\\ q_{1,2} &= c\,(\cos\varphi \mp i\sin\varphi), \quad \text{если} \quad c < 0.\end{aligned}$$

С точностью до обозначения корней эти две записи совпадают. Выберем для определенности запись, соответствующую случаю $c > 0$. Тогда выражение (3) примет вид

$$\begin{aligned}\det(A_n) &= \frac{c^{n+1}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1} - c^{n+1}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{n+1}}{2ci\sin\varphi} = \frac{2c^{n+1} i \sin(n+1)\varphi}{2ci\sin\varphi} =\\ &= \frac{c^n \sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} = c^n\,\frac{\sin((n+1)\arccos(d/(2c))}{\sin(\arccos(d/(2c))} = c^n\, U_n(d/(2c)),\end{aligned}$$

где $U_n(d/(2c))$ — многочлен Чебышева второго рода.

2. Вычисление обратной матрицы

Вычисление обратной матрицы эквивалентно решению матричного уравнения

$$A_n X = E,$$

где E — единичная матрица порядка n. Столбцы $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)^T$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ обратной матрицы X удовлетворяют разностным уравнениям $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$c\, x_{k-1}^{(j)} + d\, x_k^{(j)} + c\, x_{k+1}^{(j)} = \delta_k^j = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad k < j, \\ 1, & \text{при} \quad k = j, \\ 0, & \text{при} \quad k > j \end{cases}$$

с краевыми условиями $x_0^{(j)} = 0$ и $x_{n+1}^{(j)} = 0$. Характеристическое уравнение

$$c\, q^2 + dq + c = 0$$

выписанной разностной задачи имеет корни

$$q_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4c^2}}{2c}.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $q_1 = q_2$, т.е. $|d| = 2\,|c|$. Тогда j-й столбец обратной матрицы запишется в виде

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= C_1'\, q_1^k + C_2'\, k\, q_1^k = (C_1' + C_2'\, k)\, q_1^k, \qquad && k \le j, \\ x_k^{(j)} &= C_1''\, q_1^k + C_2''\, k\, q_1^k = (C_1'' + C_2''\, k)\, q_1^k, \qquad && k \ge j, \end{aligned}$$

где C_1', C_2', C_1'', C_2'' — константы, подлежащие определению. Из краевых условий следует, что $C_1' = 0$ и $C_1'' = -\,(n+1)\, C_2''$; поэтому выражения для элементов j-го столбца примут вид

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= k\, q_1^k\, C_2', && k \le j, \\ x_k^{(j)} &= (k - n - 1)\, q_1^k\, C_2'', \qquad && k \ge j. \end{aligned}$$

При $k = j$ оба выражения должны совпасть, т.е. $j\, q_1^j\, C_2' = (j - n - 1)\, q_1^j\, C_2''$. Отсюда получим первое соотношение, связывающее константы C_2' и C_2'':

$$C_2' = \frac{j - n - 1}{j}\, C_2''.$$

Теперь подставим эти выражения в среднее уравнение

$$c\, x_{j-1}^{(j)} + d\, x_j^{(j)} + c\, x_{j+1}^{(j)} = 1$$

и получим второе соотношение, связывающее константы C_2' и C_2'':

$$c\,(j-1)\, q_1^{j-1}\, C_2' + d\, j\, q_1^j\, C_2' + c\,(j - n)\, q_1^{j+1}\, C_2'' = 1.$$

Из этих двух соотношений следует, что

$$C_2' = \frac{j - n - 1}{c\, q_1^{j-1}\,(j\, q_1^2 - j + n + 1)}, \qquad C_2'' = \frac{j}{c\, q_1^{j-1}\,(j\, q_1^2 - j + n + 1)}.$$

Таким образом, в рассмотренном случае столбцы обратной матрицы задаются следующими выражениями $(j = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= \frac{(j - n - 1)\, k\, q_1^{k-j+1}}{c\,(j\, q_1^2 - j + n + 1)}, \qquad && k \le j, \\ x_k^{(j)} &= \frac{(k - n - 1)\, j\, q_1^{k-j+1}}{c\,(j\, q_1^2 - j + n + 1)}, \qquad && k \ge j. \end{aligned} \tag{4}$$

2) Пусть $q_1 \neq q_2$, т.е. $|d| \neq 2\,|c|$. Тогда j-й столбец обратной матрицы запишется в виде

$$x_k^{(j)} = C_1'\,q_1^k + C_2'\,q_2^k, \qquad k \le j,$$
$$x_k^{(j)} = C_1''\,q_1^k + C_2''\,q_2^k, \qquad k \ge j,$$

где C_1', C_2', C_1'', C_2'' — константы, подлежащие определению. Потребуем, чтобы эти выражения совпали при $k = j$:

$$C_1'\,q_1^j + C_2'\,q_2^j = C_1''\,q_1^j + C_2''\,q_2^j.$$

Отсюда получим первое соотношение, связывающее искомые константы:

$$(C_1' - C_1'')\,q_1^j = (C_2'' - C_2')\,q_2^j.$$

Подставив эти выражения в среднее уравнение

$$c\,x_{j-1}^{(j)} + d\,x_j^{(j)} + c\,x_{j+1}^{(j)} = 1,$$

получим второе соотношение, связывающее искомые константы:

$$c\,(C_1'' - C_1')\,q_1^{j+1} + c\,(C_2'' - C_2')\,q_2^{j+1} = 1.$$

Из этих соотношений получим

$$C_1'' = C_1' + \frac{1}{c\,q_1^j\,(q_1 - q_2)}, \quad C_2'' = C_2' - \frac{1}{c\,q_2^j\,(q_1 - q_2)},$$

откуда

$$x_k^{(j)} = C_1'\,q_1^k + C_2'\,q_2^k, \qquad k \le j,$$
$$x_k^{(j)} = \left(C_1' + \frac{1}{c\,q_1^j\,(q_1 - q_2)}\right) q_1^k + \left(C_2' - \frac{1}{c\,q_2^j\,(q_1 - q_2)}\right) q_2^k, \qquad k \ge j.$$

Из первого краевого условия следует, что $C_1' + C_2' = 0$, т.е. $C_2' = -C_1'$. Из второго краевого условия получим второе соотношение, связывающее константы C_1' и C_2':

$$\left(C_1' + \frac{1}{c\,q_1^j\,(q_1 - q_2)}\right) q_1^{n+1} + \left(C_2' - \frac{1}{c\,q_2^j\,(q_1 - q_2)}\right) q_2^{n+1} = 0.$$

Из этих соотношений следует, что

$$C_1' = -\frac{q_1^{n+1-j} - q_2^{n+1-j}}{c\,(q_1 - q_2)\,\left(q_1^{n+1} - q_2^{n+1}\right)}.$$

Таким образом, в случае разных корней характеристического уравнения столбцы обратной матрицы задаются следующими выражениями ($j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$):

$$\begin{aligned} x_k^{(j)} &= C_1'\left(q_1^k - q_2^k\right), && k \le j,\\ x_k^{(j)} &= C_1'\left(q_1^k - q_2^k\right) + \frac{q_1^{k-j} - q_2^{k-j}}{c\,(q_1 - q_2)}, && k \ge j. \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим отдельно случай, когда $d^2 < 4c^2$, т.е. корни характеристического уравнения комплексные и имеют вид

$$q_{1,2} = \cos\varphi \pm \sin\varphi, \quad \cos\varphi = -\frac{d}{2c}.$$

После несложных преобразований с использованием формулы Муавра получим из (5), что в этом случае столбцы обратной матрицы задаются следующими выражениями ($j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$):

$$x_k^{(j)} = -\frac{\sin\,(n+1-j)\,\varphi\sin k\varphi}{c\sin\varphi\sin\,(n+1)\,\varphi}, \qquad k \le j,$$
$$x_k^{(j)} = -\frac{\sin\,(n+1-j)\,\varphi\sin k\varphi}{c\sin\varphi\sin\,(n+1)\,\varphi} + \frac{\sin\,(k-j)\,\varphi}{\sin\varphi}, \qquad k \ge j.$$

Если $d = 0$, то $q_{1,2} = \pm\,i$. Тогда из последних выражений следует, что матрица (1) вырождена при нечетных n.

3. Вычисление собственных значений

Вычислим собственные значения λ матрицы (1). Аналогично п. 1 заключаем, что угловые миноры $A_k(\lambda)$ матрицы $A_n - \lambda E$ связаны рекуррентным соотношением (E — единичная матрица порядка n)

$$\begin{aligned} &A_k(\lambda) = (d-\lambda)\,A_{k-1}(\lambda) - c^2 A_{k-2}(\lambda), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \\ &A_{-1}(\lambda) = 0, \quad A_0(\lambda) = 1, \end{aligned}$$

из которого получим разностное уравнение

$$A_k(\lambda) - (d-\lambda)\,A_{k-1}(\lambda) + c^2 A_{k-2}(\lambda) = 0$$

с начальными условиями

$$A_1(\lambda) = d - \lambda, \quad A_2(\lambda) = (d-\lambda)^2 - c^2.$$

Корни характеристического уравнения

$$q^2 - (d-\lambda)\,q + c^2 = 0$$

запишем в виде

$$q_{1,2} = c\left(\frac{d-\lambda}{2c}\right) \pm i|c|\sqrt{1 - \left(\frac{d-\lambda}{2c}\right)^2}.$$

Из теоремы о кругах Гершгорина следует, что $|d-\lambda| \le 2\,|c|$, т.е. $\left|\dfrac{d-\lambda}{2c}\right| \le 1$. Поэтому мы можем обозначить $\dfrac{d-\lambda}{2c} = \cos\varphi$ и, как это было сделано в п. 1, представить корни $q_{1,2}$ в тригонометрической форме

$$q_{1,2} = c\,(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_k(\lambda) &= \alpha c^k(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k + \beta c^k(\cos\varphi - i\sin\varphi)^k = (\alpha+\beta)\,c^k\cos k\varphi + i\,(\alpha-\beta)\,c^k\sin k\varphi = \\ &= \alpha' c^k\cos k\varphi + \beta' c^k\sin k\varphi. \end{aligned}$$

Начальные условия представим в виде

$$\begin{aligned} &A_1(\lambda) = d-\lambda = \frac{d-\lambda}{2c}\,2c = 2c\cos\varphi, \\ &A_2(\lambda) = (d-\lambda)^2 - c^2 = c^2\left(4\left(\frac{d-\lambda}{2c}\right)^2 - 1\right) = c^2\left(4\cos^2\varphi - 1\right). \end{aligned}$$

Для определения α' и β' имеем систему из двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} &A_1(\lambda) = \alpha' c\cos\varphi + \beta' c\sin\varphi = 2c\cos\varphi, \\ &A_2(\lambda) = \alpha' c^2\cos 2\varphi + \beta' c^2\sin 2\varphi = c^2\left(4\cos^2\varphi - 1\right), \end{aligned}$$

решая которую получим

$$\alpha' = 1, \quad \beta' = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Заметим, что $\cos\varphi \ne \pm 1$ и, следовательно, $\sin\varphi \ne 0$. Действительно, пусть $\cos\varphi = 1$. Тогда $\dfrac{d-\lambda}{2c} =$

1 и $\lambda = d - 2c$. Однако при этом λ выполнено $A_n(\lambda) \neq 0$, поскольку

$$
\begin{aligned}
A_n(\lambda) &= \begin{vmatrix} d-\lambda & c & & & & \\ c & d-\lambda & c & & & \\ & c & d-\lambda & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & d-\lambda & c \\ & & & & c & d-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & c & & & & \\ c & 2c & c & & & \\ & c & 2c & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & 2c & c \\ & & & & c & 2c \end{vmatrix} = \\
&= c^n \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0
\end{aligned}
$$

в силу (2). Аналогично рассматривается случай $\cos\varphi = 1$.

Итак, для вычисления $A_k(\lambda)$ имеем соотношение

$$
\begin{aligned}
A_k(\lambda) &= c^k \cos k\varphi + c^k \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \sin k\varphi = c^k \frac{\cos k\varphi \sin\varphi + \cos\varphi \sin k\varphi}{\sin k\varphi} = \\
&= c^k \frac{\sin{(k+1)}\,\varphi}{\sin\varphi}.
\end{aligned}
$$

Из уравнения $A_n(\lambda) = 0$ следует, что $\sin{(n+1)}\,\varphi = 0$, т.е. $\varphi = \dfrac{\pi}{n+1}\,k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, причем $k \neq 0$ и $k \neq n+1$, поскольку в противном случае окажется, что $\sin\varphi = 0$. Из $\dfrac{d-\lambda_k}{2c} = \cos\dfrac{\pi}{n+1}\,k$ получим выражение для собственных значений матрицы (1):

$$
\lambda_k = d - 2c\,\cos\frac{\pi}{n+1}\,k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}
$$

Представим теперь выражение (6) для спектра матрицы (1) в форме

$$
\begin{aligned}
\lambda_k &= d - 2c\,\cos\frac{\pi}{n+1}\,k = 2c\left(\frac{d}{2c} - \cos\frac{\pi}{n+1}\,k\right) = 2c\left(\frac{d}{2c} - 1 + 1 - \cos\frac{\pi}{n+1}\,k\right) = \\
&= 2c\left(\frac{d}{2c} - 1 + 2\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\,k\right) = d - 2c + 4c\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\,k
\end{aligned} \tag{7}
$$

и покажем, что ее собственные значения могут быть выражены также следующей формулой:

$$
\lambda_k = d + 2c\,\cos\frac{\pi}{n+1}\,k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}
$$

Действительно, аналогичными выкладками формула (8) преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
\lambda_k &= d - 2c + 4c\cos^2\frac{\pi}{2(n+1)}\,k = d - 2c + 4c\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(n+1)}\,k\right) = \\
&= d - 2c + 4c\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\,(n+1-k).
\end{aligned}
$$

Легко заметить, что в последнем равенстве и в (7) аргументы у синуса пробегают одни и те же точки единичной окружности, но в противоположных направлениях. Следовательно, спектр матрицы (1) может быть выражен как формулой (6), так и формулой (8). К такому же заключению можно придти, если преобразовать представление (7) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\lambda_k &= d - 2c + 4c\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\,k = d - 2c + 4c\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(n+1)}\,k\right) = \\
&= d + 2c - 4c\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\,(n+1-k).
\end{aligned} \tag{9}
$$

Таким образом, из полученных здесь формул следует, что

— все собственные значения матрицы (1) лежат в интервале $(d-2c, d+2c)$ и сгущаются к его границам;

— матрица (1) положительно определена, если $d > 0$ и $d \geq 2\,|c|$;

— спектры симметричных якобиевых матриц с побочными диагоналями, равными c и $-c$, совпадают при одинаковых значениях d.

Для того чтобы расположить собственные значения матрицы (1) в интервале $(d-2c, d+2c)$ слева направо (т.е. в порядке возрастания), в формуле (6) значения k следует менять от 1 до n при $c > 0$ и от n до 1 при $c < 0$.

4. Вычисление собственных векторов

Для того чтобы вычислить собственные векторы матрицы (1), необходимо для каждого ее собственного значения λ_k найти ненулевое решение однородной линейной системы $(A_n - \lambda_k\, E)\, x^{(k)} = 0$. Если для λ_k выбрать представление (6), то эта система эквивалентна системе линейных уравнений

$$c\, x_{j-1}^{(k)} + 2c\cos\frac{\pi k}{n+1}\, x_j^{(k)} + c\, x_{j+1}^{(k)} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $x_0^{(k)} = 0$ и $x_{n+1}^{(k)} = 0$. После сокращения на c, будем ее рассматривать как разностную краевую задачу. Легко проверить, что $q_{1,2} = -\left(\cos\dfrac{\pi k}{n+1} \pm i\sin\dfrac{\pi k}{n+1}\right)$ являются корнями характеристического уравнения. Тогда общее решение этой разностной задачи представляется в виде $x_j^{(k)} = (-1)^j C_1 \cos\dfrac{j\pi k}{n+1} + (-1)^j C_2 \sin\dfrac{j\pi k}{n+1}$. Из первого краевого условия следует, что $C_1 = 0$. Отсюда заключаем, что

$$x_j^{(k)} = (-1)^j C_2 \sin\frac{j\pi k}{n+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

являются компонентами собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_k (заметим, что второе краевое условие удовлетворяется при любом C_2). В качестве одного из возможных способов нормировки собственных векторов можно взять в (10) условие $C_2 = 1$.

Пронормируем теперь полученные собственные векторы так, чтобы первая компонента каждого вектора равнялась 1. Тогда из (10) следует, что для $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} &x_1^{(k)} = 1, \\ &x_j^{(k)} = (-1)^{j+1}\frac{\sin\dfrac{j\pi k}{n+1}}{\sin\dfrac{\pi k}{n+1}}, \quad j = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что формула (11) определяет собственные векторы $x^{(k)}$, упорядоченные таким образом, что они соответствуют собственным значениям λ_k, расположенным в порядке возрастания.

И наконец, получим из (10) систему нормированных собственных векторов (евклидова норма каждого такого вектора равна 1). Это означает, надо подобрать константу C_2 из условия

$$C_2^2\left(\sin^2\frac{\pi k}{n+1} + \sin^2\frac{2\pi k}{n+1} + \cdots + \sin^2\frac{n\pi k}{n+1}\right) = C_2^2\sum_{j=1}^{n}\sin^2\frac{j\pi k}{n+1} = 1.$$

Выразив каждое слагаемое через косинус двойного аргумента $\sin^2\dfrac{j\pi k}{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\dfrac{2j\pi k}{n+1}\right)$, перепишем это условие нормировки в виде

$$C_2^2\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{2j\pi k}{n+1}\right) = 1.$$

Покажем, что последняя сумма равна -1.

Действительно, положив для упрощения выкладок $\alpha = \dfrac{2\pi k}{n+1}$, представим ее в форме

$$\sum_{j=1}^{n} \cos \frac{2j\pi k}{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi k}{n+1} + (j-1)\,\frac{2\pi k}{n+1}\right) = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\alpha + (j-1)\,\alpha\right).$$

Применяя затем последовательно формулу $2\sin b \cos a = \sin(a+b) - \sin(a-b)$, получим совокупность равенств

$$\begin{aligned}
&2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\,\alpha\right) - \sin\left(\alpha - \frac{1}{2}\,\alpha\right),\\
&2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\alpha+\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{3}{2}\,\alpha\right) - \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\,\alpha\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\alpha+(n-2)\,\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{2n-3}{2}\,\alpha\right) - \sin\left(\alpha + \frac{2n-5}{2}\,\alpha\right),\\
&2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\alpha+(n-1)\,\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\,\alpha\right) - \sin\left(\alpha + \frac{2n-3}{2}\,\alpha\right).
\end{aligned}$$

Сложив почленно эти равенства, получим

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{\alpha}{2}\sum_{j=1}^{n}\cos(\alpha+(j-1)\,\alpha) &= \sin\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\,\alpha\right) - \sin\left(\alpha - \frac{1}{2}\,\alpha\right) = \sin\left((n+1)\,\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) =\\
&= \sin\left(2\pi k - \frac{\pi k}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{\pi k}{n+1}\right) = -2\sin\frac{\alpha}{2},
\end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{2j\pi k}{n+1} = -1.$$

Следовательно, условие нормировки примет вид

$$C_2^2\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\cos\frac{2j\pi k}{n+1}\right) = C_2^2\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right) = C_2^2\,\frac{n+1}{2} = 1,$$

поэтому для всех $k = 1, 2, \dots, n$ (т.е. для любого собственного вектора) имеем

$$C_2 = \sqrt{\frac{2}{n+1}}.$$

Таким образом, систему нормированных собственных векторов матрицы (1) образуют векторы

$$x_j^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin\frac{j\pi k}{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Заметим, что эти векторы являются столбцами ортогональной матрицы. Следовательно, матрица (1) хорошо обусловлена по отношению к проблеме собственных значений. Это подтверждает известный факт, что всякая симметричная матрица обладает таким свойством.

5. Пример

В качестве примера возьмем матрицы

$$A_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$A_n^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad A_n^{(4)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & & \\ -1 & -2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

и вычислим их характеристики, рассмотренные выше для матриц вида (1).

1) Для вычисления определителей используем формулу (2):

$$\det\left(A_n^{(1)}\right) = \det\left(A_n^{(2)}\right) = 1 + n,$$
$$\det\left(A_n^{(3)}\right) = \det\left(A_n^{(4)}\right) = (-1)^n\,(1+n)\,.$$

Отсюда видно, что матрицы $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$ и $A_n^{(3)}$, $A_n^{(4)}$ являются положительно и отрицательно определенными соответственно.

2) Перед вычислением обратных матриц заметим, что корни характеристических уравнений, соответствующих матрицам $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$, имеют вид

$$q_{1,2}^{(1)} = 1 \quad \text{и} \quad q_{1,2}^{(2)} = -1.$$

Тогда из формулы (4) следует, что столбцы обратных матриц $A_n^{(1)^{-1}}$ и $A_n^{(2)^{-1}}$ определяются соответственно выражениями ($j = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$)

$$x_k^{(j)} = \frac{(n+1-j)\,k}{n+1}, \qquad x_k^{(j)} = (-1)^{k-j+2}\,\frac{(n+1-j)\,k}{n+1}, \qquad k \le j,$$
$$x_k^{(j)} = \frac{(n+1-k)\,j}{n+1}, \qquad x_k^{(j)} = (-1)^{k-j+2}\,\frac{(n+1-k)\,j}{n+1}, \qquad k \ge j.$$

Приведем вид обратных матриц $A_n^{(1)^{-1}}$ и $A_n^{(2)^{-1}}$ для $n = 2, 3, 4, 5$.

Случай $n = 2$:

$$A_n^{(1)^{-1}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)^{-1}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 3$:

$$A_n^{(1)^{-1}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)^{-1}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 4$:

$$A_n^{(1)^{-1}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)^{-1}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 5$:

$$A_n^{(1)^{-1}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_n^{(2)^{-1}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -6 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & -6 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$A_n^{(3)^{-1}} = -A_n^{(1)^{-1}} \quad \text{и} \quad A_n^{(4)^{-1}} = -A_n^{(2)^{-1}}.$$

Получим теперь числа обусловленности указанных матриц по ∞-норме. Для этого достаточно вычислить только $\mathrm{cond}_\infty\, A_n^{(1)}$, поскольку числа обусловленности этих матриц совпадают.

Преобразуем сумму элементов j-го столбца матрицы $A_n^{(1)^{-1}}$ следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{j} \frac{(n+1-j)\,k}{n+1} + \sum_{k=j+1}^{n} \frac{(n+1-k)\,j}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left((n+1-j)\sum_{k=1}^{j} k + j \sum_{k=j+1}^{n} (n+1-k)\right) =$$
$$= \frac{1}{n+1}\left((n+1-j)\,\frac{j\,(j+1)}{2} + j\,(n+1)\,(n-j) - j\,\frac{(n-j)\,(j+1+n)}{2}\right) = \frac{j\,(n+1-j)}{2}.$$

Из этой записи заключаем, что максимум суммы достигается при $j = \dfrac{n}{2}$ или $j = \dfrac{n}{2} + 1$, если n четно, и при $j = \dfrac{n+1}{2}$, если n нечетно. Следовательно,

$$\left\| A_n^{(1)^{-1}} \right\|_\infty = \begin{cases} \dfrac{n\,(n+2)}{8}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \dfrac{(n+1)^2}{8}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Поскольку $\left\| A_n^{(1)} \right\|_\infty = 4$, то получаем, что

$$\operatorname{cond}_\infty A_n^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{n\,(n+2)}{2}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \dfrac{(n+1)^2}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

3) Обратимся теперь к вычислению собственных значений. Из (7) и (9) следует, что спектры матриц $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ образуют совпадающие множества

$$\left\{ 4\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\,(n+1-k)\,, \quad k = n, n-1, \ldots, 1 \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ 4\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\,k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \right\},$$

а матриц $A_n^{(3)}$ и $A_n^{(4)}$ — также совпадающие множества

$$\left\{ -4\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\,(n+1-k)\,, \quad k = n, n-1, \ldots, 1 \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ -4\sin^2 \frac{\pi}{2(n+1)}\,k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Отсюда видно, что спектральные числа обусловленности этих матриц совпадают. Поэтому ограничимся случаем оценивания $\operatorname{cond}_2 A_n^{(2)}$ как наиболее простым для анализа:

$$\operatorname{cond}_2 A_n^{(2)} = \frac{\max\limits_k \lambda_k}{\min\limits_k \lambda_k} = \frac{4\sin^2 \dfrac{\pi n}{2(n+1)}}{4\sin^2 \dfrac{\pi}{2(n+1)}} \sim \frac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2(n+1)} \right)^2} \sim \frac{4}{\pi^2}\,n^2.$$

Выпишем спектры матриц $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ для некоторых значений n (спектры матриц $A_n^{(3)}$ и $A_n^{(4)}$ расположены симметрично им относительно нуля):

$$n = 2: \quad \{1, 3\}, \quad n = 3: \quad \left\{ 2 - \sqrt{2},\, 2,\, 2 + \sqrt{2} \right\},$$

$$n = 4: \quad \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2} \right\}, \quad n = 5: \quad \left\{ 2-\sqrt{3},\, 1,\, 2,\, 3,\, 2+\sqrt{3} \right\}.$$

4) Теперь выпишем собственные векторы матриц $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$, полученные по формуле (11) для $n = 2, 3, 4, 5$.

Случай $n = 2$:

$$\lambda_1 = 1: \quad \{1, -1\}, \quad \lambda_2 = 3: \quad \{1, 1\}.$$

Случай $n = 3$:

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}: \quad \left\{ 1, -\sqrt{2}, 1 \right\}, \quad \lambda_2 = 2: \quad \{1, 0, -1\}, \quad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}: \quad \left\{ 1, \sqrt{2}, 1 \right\}.$$

Случай $n = 4$:

$$\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}: \quad \left\{ 1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1 \right\}, \qquad \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}: \quad \left\{ 1, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1 \right\},$$

$$\lambda_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}: \quad \left\{ 1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -1 \right\}, \qquad \lambda_4 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}: \quad \left\{ 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right\}.$$

Случай $n = 5$:

$$\lambda_1 = 2 - \sqrt{3}: \quad \left\{1, -\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}, 1\right\}, \qquad \lambda_2 = 1: \quad \{1, -1, 0, 1, -1\},$$
$$\lambda_3 = 2: \quad \{1, 0, -1, 0, 1\}, \qquad \lambda_4 = 3: \quad \{1, 1, 0, -1, -1\},$$
$$\lambda_5 = 2 + \sqrt{3}: \quad \left\{1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 1\right\}.$$

Собственные векторы матриц $A_n^{(3)}$ и $A_n^{(4)}$, нормированнные по формуле (11), совпадают с указанными с точностью до знака.

Литература

1. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987.