1. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Предварительные замечания

Пусть требуется найти единственный на отрезке $[a, b]$ корень $\bar{x}$ уравнения $f(x) = 0$ в предположении непрерывности функции $f(x)$.

Если в окрестности корня $\bar{x}$ функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = (x - \bar{x})^p g(x)$, где p — натуральное, а $g(x)$ — ограниченная функция, такая, что $g(\bar{x}) \neq 0$, то p называют кратностью корня. Если $p = 1$, то корень $\bar{x}$ называют *простым*. При нечетном p функция $f(x)$ меняет знак на $[a, b]$, т.е. $f(a)f(b) < 0$, а при четном p — нет.

Исходное уравнение можно заменить эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x).$$

Эту замену можно сделать, положив, например,

$$\varphi(x) = x + g(x)f(x),$$

где $g(x)$ — произвольная непрерывная знакопостоянная функция.

Если уравнение $f(x) = 0$ имеет на $[a, b]$ несколько корней, то выполняют операцию *отделения* (локализации) корней, т.е. находят такие подотрезки отрезка $[a, b]$, каждый из которых содержит единственный корень данного уравнения. Для выполнения этой операции используют *табличный* или *графический* способы.

Различают *прямые* и *итерационные* методы решения нелинейных уравнений. Прямые методы позволяют найти все корни уравнения за конечное число операций (например, известные формулы решения квадратных уравнений).

Итерационный метод решения генерирует последовательность приближений $\{x_n\}$, которая сходится к корню в том смысле, что $\lim_{n\to\infty} |x_n - \bar{x}| = 0$. Если для вычисления x_{n+1} используется только одно ранее вычисленное приближение x_n, то такой метод называют *одноточечным* (одношаговым), или методом *простой итерации*. В противном случае метод называется *многоточечным* (многошаговым).

Если два последовательных приближения x_{n+1} и x_n на каждом шаге итераций располагаются по разные стороны от корня, то метод называют *двусторонним*, а если по одну сторону — *односторонним*.

Пусть ε — абсолютная точность, с которой требуется найти корень. Тогда критерием окончания счета по двустороннему методу является выполнение неравенства $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Для односторонних методов в качестве такого критерия можно принять одновременное выполнение неравенств $|f(x_{n+1})| < \varepsilon$ и $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Заметим, что при применении односторонних методов чаще используется относительная точность.

Скорость сходимости. Итерационный метод имеет *порядок* m (или *скорость сходимости* m), если m есть наибольшее положительное число, для которого существует такая конечная постоянная $q > 0$, что

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \leq q\,|x_n - \bar{x}|^m.$$

Величину $x_n - \bar{x}$ называют *абсолютной ошибкой* на текущем шаге итераций. Постоянную q называют *константой асимптотической ошибки*, причем эта постоянная обычно оценивается через производные функции $f(x)$ в точке $x = \bar{x}$.

Если $m = 1$ и $q \in (0,1)$, то метод имеет *линейную* скорость сходимости (иногда говорят, что в этом случае метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q).

Если имеет место оценка

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \le q_{n+1}|x_n - \bar{x}|, \quad q_n \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty,$$

то метод имеет *сверхлинейную* скорость сходимости. О сверхлинейной скорости говорят и в случае, когда $1 < m < 2$.

Если $m = 2$ (при этом ограничения на q не формулируются), то скорость сходимости называют *квадратичной*. При бо́льших значениях m соответствующие методы называют итерационными методами *высших порядков*. Чем больше m, тем более жесткими становятся условия, обеспечивающие сходимость метода.

Метод бисекций. Пусть $f(a)f(b) < 0$. Обозначим $a_0 = a$ и $b_0 = b$. Тогда последовательность приближений

$$x_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(b_n - a_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots ,$$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, x_{n+1}], & \text{если } \ f(a_n)f(x_{n+1}) < 0, \\ [x_{n+1}, b_n], & \text{если } \ f(x_{n+1})f(b_n) < 0, \end{cases}$$

гарантированно (но не монотонно) сходится к корню уравнения $f(x) = 0$ для любой непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$ (естественно, выписанный процесс прерывается, если $f(x_{n+1}) = 0$; тогда полагают $x_{n+1} = \bar{x}$). Данный метод называют еще методом деления отрезка пополам, методом половинного деления, методом дихотомии или методом вилки.

Поскольку метод бисекций является двусторонним, критерием окончания счета является выполнение неравенства $|x_{n+1} - \bar{x}| \le |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, где ε — заданная абсолютная точность. Отсюда следует, что примерное количество итераций N, необходимое для вычисления корня с относительной точностью ε, определяется неравенством

$$\frac{b-a}{2^N} \le \varepsilon \quad \text{или} \quad N \ge \frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2}, \quad \text{или} \quad N \ge \log_2\frac{b-a}{\varepsilon}.$$

Метод простой итерации. Пусть исходное уравнение $f(x) = 0$ заменено эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$. Выберем некоторое нулевое приближение к корню $x_0 \in [a,b]$, а дальнейшие приближения будем вычислять по формулам

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Последовательность x_n стремится к пределу, являющемуся корнем исходного уравнения, когда отображение $y = \varphi(x)$ является *сжимающим* (для этого достаточным является выполнение условия $|\varphi'(x)| < 1$ всюду на $[a,b]$). Очевидно, что чем меньше $|\varphi'(x)|$, тем быстрее сходимость. Вблизи корня асимптотическая сходимость определяется величиной $|\varphi'(\bar{x})|$ и будет особенно быстрой при $|\varphi'(\bar{x})| = 0$.

Если на $[a,b]$ выполнено неравенство $0 < \varphi'(x) < 1$, то сходимость к корню монотонная и односторонняя. Если же $-1 < \varphi'(x) < 0$, то сходимость двусторонняя.

Примерное количество итераций N, необходимое для вычисления корня с относительной точностью ε, определяется неравенством

$$N \ge \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) \Big/ \left(\ln\frac{1}{q}\right),$$

где константа q берется из неравенства $|\varphi'(x)| \le q < 1$.

Метод Ньютона. Расчетная формула метода Ньютона имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Метод состоит в замене дуги кривой $y = f(x)$ на касательную к ней в процессе каждой итерации. Это видно из уравнения касательной, проведенной в точке $(x_n, f(x_n))$:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

из которого расчетная формула итерационного процесса следует, если положить $y = 0$ и $x = x_{n+1}$.

В методе Ньютона (его еще называют методом Ньютона–Рафсона) сходимость монотонная и односторонняя. Примерное количество итераций N, необходимое для вычисления корня с относительной точностью ε, определяется неравенством

$$N \ge \log_2 \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Метод секущих. Пусть x_{n-1} и x_n — два последовательных приближения к корню. Заменим кривую $y = f(x)$ прямой, проходящей через точки $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ и $(x_n, f(x_n))$. В качестве следующего приближения к корню возьмем точку пересечения этой прямой с осью абсцисс. Расчетная формула имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\, f(x_n).$$

Метод секущих получается из метода Ньютона, если $f'(x)$ аппроксимируется разностью назад. Этот метод является двухточечным, его сходимость монотонная и односторонняя. Примерное количество итераций N, необходимое для вычисления корня с относительной точностью ε, определяется неравенством

$$N \ge 1.44 \log_2 \log_2 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Метод хорд. Пусть $f(a)f(b) < 0$. Сущность метода (его еще называют методом *ложного положения*) состоит в замене кривой $y = f(x)$ хордами, проходящими через концы отрезков, в которых $f(x)$ имеет противоположные знаки. Метод хорд требует, чтобы один конец отрезка, на котором ищется корень, был неподвижен. В качестве неподвижного конца x_0 выбирают тот конец отрезка, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком второй производной $f''(x)$. Расчетная формула имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_0)}\, (x_n - x_0).$$

Метод хорд, как и метод секущих, является двухточечным, его сходимость монотонная и односторонняя.

Комбинированный метод. Последовательно применяя методы Ньютона и хорд, получим следующие расчетные формулы:

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{f(\tilde{x}_n)}{f'(\tilde{x}_n)},$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\tilde{x}_n) - f(x_0)}\, (\tilde{x}_n - x_0).$$

Комбинированный метод является двухточечным и двусторонним.

Методы высоких порядков сходимости. Если в методе простых итераций $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ функция $\varphi(x)$ выбрана так, чтобы выполнялось

$$\varphi'(\bar{x}) = \varphi''(\bar{x}) = \ldots = \varphi^{(m-1)}(\bar{x}) = 0, \quad \varphi^{(m)}(\bar{x}) \neq 0,$$

то в результате получим метод, порядок сходимости которого равняется m. Часто такой метод называют стационарным процессом m-го порядка. Скорость его сходимости вблизи корня определяется следующим равенством:

$$x_{n+1} - \bar{x} = \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}) = \frac{1}{m!}(x_n - \bar{x})^m \varphi^{(m)}(\xi), \quad \xi \in (x_n, \bar{x}).$$

Недостаток методов высоких порядков сходимости состоит в том, что чем больше значение m, тем меньше область гарантированной сходимости, а сама скорость сходимости реально достигается лишь в узкой окрестности корня.

Более подробное изложение рассмотренных методов и их геометрическая интерпретация приведены в материалах по студенческому вычислительному практикуму по численному решению нелинейных уравнений (см. раздел “Учебно-методические материалы” по адресу http://www.srcc.msu.su/num_anal).

1.2. Задачи и решения

1. Построить итерационный процесс Ньютона для вычисления $\sqrt[p]{a}$, $a > 0$, где p — вещественное число.

Решение. Значение $\sqrt[p]{a}$ является корнем уравнения

$$f(x) \equiv x^p - a = 0.$$

Для этого уравнения метод Ньютона имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p x_n^{p-1}} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p x_n^{p-1}}.$$

Для $p = 2$ получим

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

2. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ единственный корень $\bar{x}$ и для его вычисления используется метод простой итерации. Показать, что если $\varphi(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$ и $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ на этом отрезке, то для любого начального приближения $x_0 \in [a, b]$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню $\bar{x}$.

Решение. Поскольку $\bar{x} = \varphi(\bar{x})$, то

$$x_{n+1} - \bar{x} = \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

По теореме Лагранжа для каждого n существует такое ξ_n, $\xi_n \in [x_n, \bar{x}]$, что

$$x_{n+1} - \bar{x} = (x_n - \bar{x})\,\varphi'(\xi_n).$$

Полученное соотношение называют *уравнением ошибки*. Последовательно применяя указанную теорему, получим

$$x_{n+1} - \bar{x} = (x_n - \bar{x})\,\varphi'(\xi_n) = (x_{n-1} - \bar{x})\,\varphi'(\xi_n)\varphi'(\xi_{n-1}) = \ldots = (x_0 - \bar{x})\,\varphi'(\xi_n)\varphi'(\xi_{n-1})\ldots\varphi'(\xi_0),$$

где $\xi_{n-1} \in [x_{n-1}, \bar{x}], \dots, \xi_0 \in [x_0, \bar{x}]$.

Поскольку $\left|\varphi'(\xi_i)\right| \le q$, $i = 0, 1, 2, \dots n$, то

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \le q^{n+1}\,|x_0 - \bar{x}|.$$

При $q < 1$ правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню x (тем самым, отображение $\varphi(x)$ является сжимающим).

Достаточное условие сходимости $q < 1$ (достаточное условие сходимости метода простой итерации) часто называют *условием Липшица*, а константу q — *константой Липшица*.

В достаточной близости к корню характер сходимости метода простой итерации можно выразить через $\varphi'(\bar{x})$ с помощью разложения в ряд Тейлора следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \bar{x} &= \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x} + (x_n - \bar{x})) - \varphi(\bar{x}) = \\ &= \varphi(\bar{x}) + (x_n - \bar{x})\,\varphi'(\bar{x}) + \frac{1}{2}\,(x_n - \bar{x})^2\,\varphi''(\xi) - \varphi(\bar{x}) = \\ &= (x_n - \bar{x})\,\varphi'(\bar{x}) + \frac{1}{2}\,(x_n - \bar{x})^2\,\varphi''(\xi), \quad \text{где } \ \xi \in [x_n, \bar{x}]. \end{aligned}$$

3. Построить итерационный процесс вычисления всех корней уравнения

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

методом простой итерации.

Решение. Табличным способом отделения корней выделим отрезки, на концах которых функция $f(x)$ имеет разные знаки:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
sign $f(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$

Таким образом, корни исходного уравнения лежат на отрезках $[-3, -2]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, для каждого из которых построим свой итерационный процесс.

Так как на $[-3, -2]$ имеем $x^2 \ne 0$, то исходное уравнение можно разделить на x^2. В результате получим равносильное уравнение

$$x = \varphi(x) \equiv \frac{1}{x^2} - 3.$$

Итерационный процесс для нахождения первого корня:

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} - 3.$$

Сходимость имеет место для всех начальных приближений x_0 из этого отрезка, так как для $x \in [-3, -2]$ имеет место оценка

$$|\,\varphi'(x)\,| = \left|-\frac{2}{x^3}\right| \le \frac{1}{4} < 1.$$

Для двух других отрезков исходное уравнение представим в виде $x^2\,(\,x + 3\,) - 1 = 0$. Так как для рассматриваемых отрезков $x + 3 \ne 0$, то получаем два итерационных процесса:

$$x_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{x_n + 3}}, \quad x_{n+1} = +\frac{1}{\sqrt{x_n + 3}}.$$

Сходимость для этих отрезков следует из оценки:

$$|\,\varphi'(x)\,| = \left|\frac{1}{2\,\sqrt{x + 3}}\right|^3 < 1.$$

4. Пусть уравнение $f(x)=0$ имеет корень на отрезке $[a,b]$, причем $f(x)$ дифференцируема, а $f'(x)$ знакопостоянна на этом отрезке. Требуется построить равносильное уравнение вида $x=\varphi(x)$, для которого на $[a,b]$ выполнено достаточное условие сходимости метода простой итерации $|\varphi'(x)|\le q<1$.

Решение. Для определенности будем считать, что $f'(x)>0$. Пусть

$$0<m\le f'(x)\le M.$$

Заменим исходное уравнение равносильным:

$$x=\varphi(x)\equiv x-\lambda f(x), \quad \lambda>0.$$

Подберем параметр λ так, чтобы на $[a,b]$ выполнялось неравенство:

$$0\le\varphi'(x)=1-\lambda f'(x)\le q<1.$$

Это неравенство будет заведомо выполнено, если будет выполнено условие

$$0\le\varphi'(x)=1-\lambda M\le 1-\lambda m=q<1.$$

При $\lambda=\dfrac{1}{M}$ мы получаем $q=1-\dfrac{m}{M}<1$. Следовательно, при таком выборе λ достаточное условие сходимости метода простой итерации выполнено.

5. Определить область начальных приближений x_0, для которых итерационный процесс

$$x_{n+1}=\frac{x_n^3+1}{20}$$

сходится.

Решение. Иными словами, надо указать такое множество значений x_0, для которых данный итерационный процесс, представляющий собой метод простой итерации, сходится к корню уравнения

$$x=\varphi(x)\equiv\frac{x^3+1}{20}.$$

В силу достаточного условия сходимости метода простой итерации, на искомой области должно выполняться неравенство $\left|\varphi'(x)\right|<1$. Решая это неравенство, получим

$$\left|\varphi'(x)\right|=\left|\frac{3x^2}{20}\right|<1, \quad |x|<2\sqrt{\frac{5}{3}}\approx 2.58\,.$$

Теперь рассмотрим те значения x_0, для которых следующее приближение x_1 попадает в полученный интервал, после чего итерационный процесс будет гарантированно сходиться. Такие x_0 удовлетворяют неравенству

$$\left|\frac{x^3+1}{20}\right|<2\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Легко видеть, что интервал значений x_0, для которых рассматриваемый процесс сходится со второй итерации, шире интервала, полученного из достаточного условия сходимости. Обобщая данное наблюдение, получим, что область начальных приближений x_0, для которых этот процесс в конечном итоге сходится, определяется неравенством

$$\frac{x^3+1}{20}<x$$

для положительных x. Аналогичное расширение области сходимости имеется для отрицательных x.

Корнями заданного уравнения являются корни $x_1^*<0$, $x_2^*>0$ и $x_3^*>0$ квадратного трехчлена

$$x^3-20x+1=0.$$

Из геометрической интерпретации метода простой итерации для данного случая следует, что сходимость будет иметь место, если $x_0 \in [x_1^*, x_3^*]$. При $x_0 = x_1^*$ и $x_0 = x_3^*$ требуется лишь одна итерация, а при $x_0 \in (x_1^*, x_3^*)$ сходимость будет к корню x_2^* (следовательно, x_1^* и x_3^* — точки *отталкивания*, а точка x_2^* — точка *притяжения*).

Таким образом, область начальных приближений рассмотренного итерационного процесса имеет вид $x_0 \in [x_1^*, x_3^*]$.

6. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ простой корень, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Показать, что при этих условиях метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости.

Решение. Метод Ньютона имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Обозначим через $\bar{x}$ искомый корень. Тогда $\bar{x}$ будет также и корнем уравнения

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Следовательно, мы можем рассматривать метод Ньютона как частный случай метода простой итерации, для которого

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} \quad \text{и} \quad \varphi'(\bar{x}) = 0.$$

Оценим теперь скорость сходимости метода Ньютона, используя разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{x}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \bar{x} &= \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}) = \varphi\big(\bar{x} + (x_n - \bar{x})\big) - \varphi(\bar{x}) = \\ &= \varphi(\bar{x}) + (x_n - \bar{x})\varphi'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x_n - \bar{x})^2 \varphi''(\xi) - \varphi(\bar{x}) = \\ &= \frac{1}{2}(x_n - \bar{x})^2 \varphi''(\xi), \quad \text{где } \xi \in [x_n, \bar{x}]. \end{aligned}$$

Следовательно, вблизи корня метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости.

7. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень $\bar{x}$ кратности $p > 1$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Показать, что при этих условиях метод Ньютона сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $(p-1)/p$.

Решение. Поступая так же, как и в случае простого корня, получим

$$x_{n+1} - \bar{x} = (x_n - \bar{x})\, \varphi'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x_n - \bar{x})^2 \varphi''(\xi), \quad \text{где } \xi \in [x_n, \bar{x}].$$

Однако в случае $p > 1$ в выражении

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2}$$

содержится неопределенность “ноль на ноль”, так как $\bar{x}$ является также корнем уравнения $f'(x) = 0$. Оценим $\varphi'(x)$.

Функция $f(x)$ в окрестности корня $\bar{x}$ кратности p ведет себя приблизительно как $a\,(x - \bar{x})^p$, где a — константа. Тогда в малой окрестности корня

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} \approx \frac{a\,(x-\bar{x})^p\, ap(p-1)\,(x-\bar{x})^{p-2}}{a^2p^2\,(x-\bar{x})^{2p-2}} = \frac{p-1}{p} < 1.$$

Отсюда видно, что чем выше кратность корня, тем медленнее сходимость.

8. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень $\bar{x}$ известной заранее кратности $p > 1$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

Решение. Требуемую модификацию будем искать в виде

$$x_{n+1} = x_n - \alpha\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

и подберем параметр α так, чтобы имела место квадратичная сходимость. Рассмотрим данную модификацию как специальный случай метода простой итерации $x_{n+1} = \varphi\,(x)$, для которого выполнено $\bar{x} = \varphi\,(\bar{x})$, причем вблизи корня

$$\varphi'(x) = 1 - \alpha + \alpha\,\frac{f(x)f''(x)}{\big(f'(x)\big)^2} \approx 1 - \alpha + \alpha\,\frac{p-1}{p} = \frac{p-\alpha}{p}.$$

Для обеспечения квадратичной сходимости параметр α надо подобрать таким, чтобы $\varphi'(\bar{x}) = 0$, что и выполняется при $\alpha = p$.

9. Оценить скорость сходимости метода хорд.

Решение. Поступая так же, как и в задачах об определении скорости сходимости метода Ньютона, представим метод хорд как частный случай метода простой итерации:

$$x = \varphi\,(x) = x - \frac{f(x)}{f(x) - f(x_0)}\,(x - x_0).$$

Вблизи корня $\bar{x}$ уравнения $f(x) = 0$ имеем

$$x_{n+1} - \bar{x} = (x_n - \bar{x})\,\varphi'(\bar{x}) + \frac{1}{2}\,(x_n - \bar{x})^2\,\varphi''(\xi), \quad \xi \in [x_n, \bar{x}],$$

где

$$\begin{aligned}\varphi'(\bar{x}) &= 1 + \frac{f'(\bar{x})}{f(x_0)}\,(\bar{x} - x_0) = \frac{f(\bar{x}) - f'(\bar{x})(\bar{x} - x_0) + \dfrac{f''(\eta)}{2}(\bar{x} - x_0)^2 + f'(\bar{x})(\bar{x} - x_0)}{f(x_0)} = \\ &= \frac{(\bar{x} - x_0)^2}{2}\,\frac{f''(\eta)}{f(x_0)}, \quad \eta \in [x_0, \bar{x}].\end{aligned}$$

Если второе начальное приближение взять в такой окрестности корня, где $\big|\varphi'(\bar{x})\big| \le q < 1$, то метод хорд будет иметь линейную скорость сходимости.

10. Построить метод Ньютона для вычисления числа $\dfrac{1}{a}$, так, чтобы расчетные формулы не содержали операций деления. Определить область сходимости метода при $a > 0$.

Решение. Искомое число является корнем уравнения

$$\frac{1}{ax} - 1 = 0.$$

Для этого уравнения метод Ньютона имеет вид:

$$x_{n+1} = 2\,x_n - a\,x_n^2.$$

Если $x_0 = 0$ или $x_0 = \dfrac{2}{a}$, то сходимости к корню не будет, так как все x_n равны 0. Если $x_0 < 0$, то сходимости также не будет, поскольку все x_n останутся отрицательными. Если взять $x_0 > \dfrac{2}{a}$, то все $x_n < 0$.

Таким образом, сходимость метода Ньютона для данного случая имеет место, если начальное приближение берется из интервала $(0, 2/a)$.

11. Пусть $\bar{x}$ — простой корень уравнения $f(x) = 0$. Оценить скорость сходимости метода секущих.

Решение. Преобразуем расчетную формулу метода секущих

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\, f(x_n)$$

к виду

$$x_{n+1} - \bar{x} = x_n - \bar{x} - \frac{\big((x_n - \bar{x}) - (x_{n-1} - \bar{x})\big) f\big(\bar{x} + (x_n - \bar{x})\big)}{f\big(\bar{x} + (x_n - \bar{x})\big) - f\big(\bar{x} + (x_{n-1} - \bar{x})\big)}.$$

Разложим $f\big(\bar{x} + (x_n - \bar{x})\big)$ и $f\big(\bar{x} + (x_{n-1} - \bar{x})\big)$ в ряды Тейлора в точке $\bar{x}$ и подставим в последнюю формулу, учитывая, что $f(\bar{x}) = 0$:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \bar{x} &= x_n - \bar{x} - \frac{(x_n - \bar{x}) f'(\bar{x}) + 0.5 (x_n - \bar{x})^2 f''(\bar{x}) + \cdots}{f'(\bar{x}) + 0.5\big((x_n - \bar{x}) + (x_{n-1} - \bar{x})\big) f''(\bar{x}) + \cdots} = \\
&= (x_n - \bar{x}) \left(1 - \frac{1 + 0.5 (x_n - \bar{x})^2 \dfrac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + \cdots}{1 + 0.5 (x_n - \bar{x}) \dfrac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + 0.5 (x_{n-1} - \bar{x}) \dfrac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + \cdots} \right) = \\
&= \frac{1}{2} (x_n - \bar{x})\, (x_{n-1} - \bar{x})\, \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + O\big((x_n - \bar{x})^2\big).
\end{aligned}$$

Опустив члены более высокого порядка малости, получаем уравнение ошибки

$$x_{n+1} - \bar{x} = C\, (x_n - \bar{x})\, (x_{n-1} - \bar{x}), \quad C = \frac{1}{2}\, \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\,.$$

Скорость сходимости определяется соотношением

$$x_{n+1} - \bar{x} = A\, (x_n - \bar{x})^m,$$

в котором значения A и m пока неизвестны. Тогда

$$x_n - \bar{x} = A\, (x_{n-1} - \bar{x})^m,$$

откуда

$$x_{n-1} - \bar{x} = A^{-1/m}\, (x_n - \bar{x})^{1/m}.$$

Подставим эти соотношения в уравнение ошибки:

$$A (x_{n-1} - \bar{x})^m = C\, (x_n - \bar{x})\, A^{-1/m}\, (x_n - \bar{x})^{1/m},$$

$$(x_{n-1} - \bar{x})^m = C\, A^{-1-1/m}\, (x_n - \bar{x})^{1+1/m}.$$

Приравнивая эти два полинома, получим два уравнения с двумя неизвестными

$$m = 1 + \frac{1}{m},$$
$$1 = C\, A^{-(1+1/m)}.$$

Из первого уравнения находим показатель скорости сходимости метода секущих

$$m = 0.5\, (1 + \sqrt{5}) \approx 1.618.$$

Константа асимптотической ошибки

$$A = \left(\frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right)^{\dfrac{1}{m}}.$$

12. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень $\bar{x}$ неизвестной кратности $p > 1$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Построить модификацию метода Ньютона с квадратичной скоростью сходимости и предложить способ численной оценки величины кратности корня.

Решение. Для уравнения

$$g(x) \equiv \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

корень $\bar{x}$ будет простым. Тогда для уравнения $g(x) = 0$ метод Ньютона примет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{\big(f'(x_n)\big)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

и будет иметь квадратичный порядок сходимости.

В окрестности $\bar{x}$ функция $f(x) \approx a\,(x-\bar{x})^p$. Тогда

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \approx \frac{a\,(x-\bar{x})^p}{ap\,(x-\bar{x})^{p-1}} = \frac{1}{p}\,(x-\bar{x}).$$

Для двух последовательных приближений x_1 и x_2 имеем систему приближенных уравнений

$$g(x_1) \approx \frac{1}{p}\,(x_1-\bar{x}),$$
$$g(x_2) \approx \frac{1}{p}\,(x_2-\bar{x}).$$

Отсюда получим оценку для кратности p корня $\bar{x}$:

$$p \approx \frac{x_2 - x_1}{g(x_2) - g(x_1)}.$$

Такой способ оценивания p можно применять на каждой итерации.

13. Пусть для решения уравнения $x^3 - x = 0$ применяется метод Ньютона. При каких начальных приближениях x_0 имеет место сходимость и к какому корню?

Решение. Заданное уравнение имеет корни $\bar{x}_1 = -1$, $\bar{x}_2 = 0$ и $\bar{x}_3 = 1$, а метод Ньютона для его решения имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n}{3x_n^2 - 1}.$$

Применим геометрическую интерпретацию метода Ньютона для данного случая. Если начальное приближение x_0 таково, что $3x_0^2 - 1 = 0$, т.е. $x_0 = \pm 1/\sqrt{3}$, то формальной сходимости нет (метод не определен). При $x_0 < -1/\sqrt{3}$ метод сходится к корню $\bar{x}_1 = -1$, а при $x_0 > 1/\sqrt{3}$ — к корню $\bar{x}_3 = 1$.

Теперь найдем x_0, при котором первая же итерация попадет в корень $\bar{x}_3 = 1$. Такое начальное приближение является одним из корней уравнения

$$x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = 1 \quad \text{или} \quad 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

Его корни $x_{1,2} = 1$ и $x_3 = -1/2$, откуда искомое начальное приближение есть $x_0 = -1/2$. Из симметрии задачи следует, что при $x_0 = 1/2$ первая же итерация попадет в корень исходного уравнения $\bar{x}_1 = -1$.

Начальное приближение x_0, при котором первая же итерация попадет в точку $x = 1/\sqrt{3}$, есть соответствующий корень уравнения

$$x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Аналогично ищется x_0, при котором первая же итерация попадет в точку $x = -1/\sqrt{3}$.

Найдем точку зацикливания метода из уравнения

$$x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = -x \quad \text{или} \quad 5x^2 = 1.$$

Следовательно, при $x_0 = \pm 1/\sqrt{5}$ метод зацикливается.

Можно найти такие x_0, при которых имеет место попадание в точки $\pm 1/\sqrt{3}$, не с первой, а со второй, третьей и т.д. итераций. Для этого можно предложить следующее решение задачи.

Обозначим области сходимости метода Ньютона

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \equiv \frac{2x^3}{3x^2 - 1}$$

к корням $\bar{x} = -1, 0, +1$ через X_-, X_0, X_+ соответственно. Кроме того, определим последовательности точек $\{x_n^\pm\}$ для $n \geq 0$ следующими условиями

$$\varphi(x_{n+1}^\pm) = x_n^\pm, \quad x_0^\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

для элементов которых справедливы неравенства

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = x_0^- < x_1^+ < x_2^- < \ldots < -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0 < \frac{1}{\sqrt{5}} < \ldots < x_2^+ < x_1^- < x_0^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k}^- = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}^+ = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \lim_{k\to\infty} x_{2k}^+ = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}^- = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Тогда

$$X_- = (-\infty, x_0^-) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[(x_{2k-1}^+, x_{2k}^-) \cup \left(x_{2k-1}^-, x_{2(k-1)}^+ \right) \right],$$

$$X_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right),$$

$$X_+ = (x_0^+, \infty) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\left(x_{2(k-1)}^-, x_{2k-1}^+ \right) \cup (x_{2k}^+, x_{2k-1}^-) \right].$$

Кроме того, если $x_0 = x_n^\pm$, $n \geq 0$, то метод не определен, а при $x_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ — зацикливается.

14. Определить скорость сходимости метода бисекций.

Решение. Если за искомое приближение $\bar{x}^*$ к корню $\bar{x}$ на итерации с номером n взять середину текущего отрезка, т.е. взять $\bar{x}^* = (b_n - a_n)/2$, то

$$|\bar{x}^* - \bar{x}| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^2} = \cdots = \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Следовательно, сходимость метода бисекций линейная, при этом последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню со скоростью геометрической прогрессии с знаменателем $1/2$.

15. Построить итерационный процесс для решения уравнения

$$ax + b = 0, \quad 0 < a < 1$$

без использования операции деления.

Решение. Преобразуем исходное уравнение к виду

$$ax + b = 0 \equiv (a-1)x + x + b = 0.$$

Отсюда получим равносильное уравнение

$$x = \varphi(x) = (1-a)x - b.$$

В силу достаточного условия сходимости метода простой итерации сходимость имеет место для любого начального приближения x_0, поскольку $\varphi'(x) = 1 - a < 1$.

Заметим, что построенный итерационный процесс заменяет операцию деления двух чисел на последовательность операций умножения и сложения (вычитания).

В действительности сходимость имеет место и для $0 < a < 2$, поскольку для этих значений параметра a выполнено достаточное условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$.

16. Показать, что для любого начального приближения $x_0 > 0$ итерационный процесс

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad a \geq 1$$

для вычисления $\sqrt{a}$ обладает монотонной односторонней сходимостью, такой, что

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq \sqrt{a}.$$

Оценить скорость сходимости.

Решение. Поскольку $x_n > 0$ (см. расчетную формулу) при всех n, то

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2 \geq 0, \qquad (*)$$

откуда следует, что начиная с $n = 1$ выполнено $x_n \geq \sqrt{a} \geq 1$. Так как

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\,x_n - \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - a\right) \geq 0,$$

то последовательность $\{x_n\}$ является монотонно убывающей начиная с $n = 1$.

Если $x_0 \geq 1$, то из $(*)$ следует, что для всех n выполнено неравенство

$$x_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2,$$

т.е. имеет место квадратичная скорость сходимости начиная с первой итерации. Если $x_0 < 1$, то начиная с $n = 1$ все равно будет выполнено $x_n \geq \sqrt{a} \geq 1$; следовательно, квадратичная скорость сходимости имеет место начиная со второй итерации.

17. Пусть дана функция $\varphi(x) = \alpha \sin^2 x + \beta \cos^2 x + \gamma$. При каких ограничениях на α, β и γ метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходится при любом начальном приближении.

Решение. Будем искать требуемые ограничения из достаточного признака сходимость $|\varphi'(x)| < 1$:

$$\begin{aligned} |\varphi'(x)| &= |2\alpha \sin x \cos x - 2\beta \sin x \cos x| = |\alpha \sin 2x - \beta \sin 2x| = \\ &= |\alpha - \beta||\sin 2x| \leq |\alpha - \beta| \leq 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что сходимость при любом начальном приближении имеет место при $|\alpha - \beta| < 1$ и любом γ.

18. Пусть дана функция $\varphi(x) = ae^{-bx^2} + c$, $a \neq 0$, $b \geq 0$. При каких ограничениях на a, b и c метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходится при любом начальном приближении.

Решение. Будем искать требуемые ограничения из достаточного признака сходимость $|\varphi'(x)| < 1$:

$$|\varphi'(x)| = \left|-2abxe^{-bx^2}\right| < 1.$$

Найдем x, при котором левая часть этого неравенства достигает максимума. В точках максимума должно выполнятся равенство

$$e^{-bx^2} - 2x^2be^{-bx^2} = 0,$$

откуда $x = \pm 1/\sqrt{2b}$. Сходимость имеет место, если в этих точках будет выполнено неравенство

$$\left|2abe^{-b(1/2b)}/\sqrt{2b}\right| = \left|a\sqrt{2b}e^{-1/2}\right| < 1.$$

Следовательно, сходимость при любом начальном приближении имеет место при $|a\sqrt{2b}| < \sqrt{e}$ и любом c.

19. Построить метод простой итерации для решения уравнения

$$2 + x = e^x, \quad x > 0.$$

Решение. Метод простой итерации

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = e^{x_n} - 2$$

применять нельзя, поскольку при всех $x > 0$ не выполнено достаточное условие сходимости:

$$\varphi'(x) = e^x > 1.$$

Применим стандартный прием перехода к обратной функции (в данном случае логарифмируем исходное уравнение):

$$x = \varphi(x) = \ln(2 + x),$$

для которого итерационный процесс

$$x_{n+1} = \ln(2 + x_n)$$

сходится, поскольку

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2 + x} < 1 \quad \text{при} \quad x > 0.$$

20. Вывести апостериорную оценку погрешности метода простой итерации.

Решение. В задаче 2 выведена *априорная* оценка погрешности метода простой итерации $x_n = \varphi(x_{n-1})$:

$$|x_n - \bar{x}| \le q|x_{n-1} - \bar{x}| \le \ldots \le q^n|x_0 - \bar{x}|,$$

где q берется из неравенства $|\varphi'(x)| \le q < 1$. Эта оценка неконструктивна, поскольку точное значение корня $\bar{x}$, как правило, не известно заранее. Поэтому на практике применяют *апостериорную* оценку погрешности

$$|x_n - \bar{x}| \le \frac{q}{1 - q}\,|x_n - x_{n-1}|,$$

которая получается из неравенств

$$|x_n - \bar{x}| \le q|x_{n-1} - \bar{x}| = q|x_{n-1} - x_n + x_n - \bar{x}| \le q|x_{n-1} - x_n| + q|x_n - \bar{x}|.$$

21. Оценить скорость сходимости метода простой итерации для уравнения

$$x = \varphi(x) = 1 - \sin x.$$

Пусть в это уравнение введен параметр $\lambda \neq 0$ следующим образом:

$$x + \lambda x = \lambda x + 1 - \sin x.$$

Тогда исходное уравнение перепишется в виде

$$x = \varphi(x) = \frac{\lambda x + 1 - \sin x}{1 + \lambda}.$$

Подобрать для преобразованного уравнения такое значение параметра λ, чтобы сходимость метода простой итерации была как можно более быстрой.

Решение. Рассмотрим сначала итерационный процесс для исходного уравнения:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = 1 - \sin x_n.$$

Из задачи 2 с точностью до второго порядка малости имеем

$$|x_{n+1} - \bar{x}| \approx |\varphi'(\bar{x})||x_n - \bar{x}| = |\cos \bar{x}||x_n - \bar{x}|,$$

где $\bar{x}$ — точное значение корня. Его можно оценить графически как точку пересечения графиков функций

$$y_1 = 1 - x, \quad y_2 = \sin x.$$

Из этой оценки следует, что $0 < \bar{x} < 1$. Тогда воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции $\sin x$ и удержим первый член: $\sin x \sim x$. Подставив эту оценку в исходное уравнение, получим $\bar{x} \sim 1/2$. Следовательно, скорость сходимости рассматриваемого метода оценивается так:

$$q = |\varphi'(\bar{x})| = |\cos \bar{x}| \sim \cos 0.5 \sim 0.87,$$

т.е. имеет место сходимость со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем, примерно равным 0.87.

Теперь обратимся к выбору параметра λ. Из задач 2 и 6 следует, что сходимость будет наиболее быстрой, если параметр λ выбран таким, что $\varphi'(\bar{x}) = 0$. Для нашего случая значение λ получается из следующего уравнения:

$$\varphi'(\bar{x}) = \frac{\lambda - \cos \bar{x}}{1 + \lambda} = 0, \quad \lambda = \cos \bar{x}.$$

Пользуясь приближенной оценкой для $\bar{x}$, получаем $\lambda \approx \cos 0.5$. При этом значении λ скорость сходимости близка к квадратичной.

22. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ простой корень $\bar{x}$, причем $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Рассмотрим метод Ньютона и обозначим ошибку на итерации с номером n через $\varepsilon_n = x_n - \bar{x}$. Вывести *уравнение ошибки* для метода Ньютона (т.е. рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет ε_n).

Решение. Метод Ньютона имеет вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Обозначим через $\bar{x}$ искомый корень. Тогда $\bar{x}$ будет также и корнем уравнения

$$x = \varphi(x) \equiv x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Следовательно, мы можем рассматривать метод Ньютона как частный случай метода простой итерации, для которого

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \quad \text{и} \quad \varphi'(\bar{x}) = 0.$$

Оценим теперь скорость сходимости метода Ньютона, используя разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{x}$:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \bar{x} &= \varphi(x_n) - \varphi(\bar{x}) = \varphi\big(\bar{x} + (x_n - \bar{x})\big) - \varphi(\bar{x}) = \\
&= \varphi(\bar{x}) + (x_n - \bar{x})\varphi'(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x_n - \bar{x})^2\varphi''(\bar{x}) + \frac{1}{6}(x_n - \bar{x})^3\varphi'''(\xi) - \varphi(\bar{x}) = \\
&= \frac{1}{2}(x_n - \bar{x})^2\varphi''(\bar{x}) + \frac{1}{6}(x_n - \bar{x})^3\varphi'''(\xi), \quad \text{где} \ \ \xi \in [x_n, \bar{x}].
\end{aligned}$$

Отбрасывая в этом равенстве член более высокого порядка малости и вычислив значение $\varphi''(\bar{x})$, получим искомое уравнение ошибки:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\,\varepsilon_n^2.$$

Следовательно, вблизи корня метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости.

Теперь получим уравнение ошибки другим, более громоздким способом, но полезным в некоторых других случаях.

Разложим $f(\bar{x} + \varepsilon_n)$ и $f'(\bar{x} + \varepsilon_n)$ в ряды Тейлора, заменив в формуле метода Ньютона x_n на $x_n = \bar{x} + \varepsilon_n$:

$$f(\bar{x} + \varepsilon_n) = f(\bar{x}) + \varepsilon_n f'(\bar{x}) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(\bar{x}) + O\left(\varepsilon_n^3\right),$$

$$f'(\bar{x} + \varepsilon_n) = f'(\bar{x}) + \varepsilon_n f''(\bar{x}) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f'''(\bar{x}) + O\left(\varepsilon_n^3\right).$$

Вычтем $\bar{x}$ из левой и правой частей формулы метода Ньютона и представим ее в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n f'(\bar{x}) + \dfrac{\varepsilon_n^2}{2} f''(\bar{x}) + O\left(\varepsilon_n^3\right)}{f'(\bar{x}) + \varepsilon_n f''(\bar{x}) + \dfrac{\varepsilon_n^2}{2} f'''(\bar{x}) + O\left(\varepsilon_n^3\right)} = \\
&= \varepsilon_n - \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} + \frac{O\left(\varepsilon_n^3\right)}{f'(\bar{x}) + \varepsilon_n f''(\bar{x}) + \dfrac{\varepsilon_n^2}{2} f'''(\bar{x}) + O\left(\varepsilon_n^3\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\,\varepsilon_n^2 + O\left(\varepsilon_n^3\right).
\end{aligned}$$

Здесь использовано правило деления многочлена на многочлен. Отбрасывая члены более высокого порядка малости, чем ε_n^2, получим выведенное ранее уравнение ошибки для метода Ньютона.

23. Пусть в уравнении $x = \varphi(x)$ функция $\varphi(x)$ такова, что $\varphi'(\bar{x}) \neq 0$ и $|\varphi'(\bar{x})| < 1$, где $\bar{x}$ — корень этого уравнения. Подобрать такую функцию $\Phi(x)$, чтобы уравнение $x = \Phi(x)$ имело бы тот же корень $\bar{x}$ и метод простой итерации $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ имел бы квадратичную скорость сходимости в окрестности корня $\bar{x}$.

Решение. Поскольку $\varphi'(\bar{x}) \neq 0$, из задачи 2 следует, что итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ имеет линейную скорость сходимости. Тем самым задача сводится к ускорению сходимости путем замены исходного уравнения другим уравнением $x = \Phi(x)$, в котором

— $x = \Phi(x)$ имеет тот же корень и

— для $\Phi'(x)$ выполнено условие $\Phi'(\bar{x}) = 0$.

Построим $\Phi(x)$ следующим образом. Рассмотрим функцию $f(x) = \varphi(x) - x$. Тогда исходное уравнение $x = \varphi(x)$ запишется как $f(x) = 0$. Будем искать $\Phi(x)$ в виде

$$\Phi(x) = x + a(x)f(x).$$

При таком выборе $\Phi(x)$ уравнение $x = \Phi(x)$ имеет корень $\bar{x}$, так как $\Phi(\bar{x}) = \bar{x} + a(\bar{x})f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Теперь выберем $a(x)$ так, чтобы при $f(x) = 0$ выполнялось равенство $\Phi'(x) = 0$:

$$\Phi'(x) = 1 + a'(x)f(x) + a(x)f'(x) = 1 + a(x)f'(x), \quad a(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

При таком выборе $a(x)$ имеем $\Phi'(\bar{x}) = 0$, поскольку $f(\bar{x}) = 0$. Таким образом, мы построили функцию

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{\varphi'(x) - 1},$$

такую, что для уравнения $x = \varphi(x)$ итерационный процесс

$$x_{n+1} = \Phi(x_n) = \frac{x_n\varphi'(x_n) - \varphi(x_n)}{\varphi'(x_n) - 1}$$

имеет второй порядок сходимости в окрестности корня $\bar{x}$ (см. также задачу 6).

24. Определить область начальных приближений x_0, для которых итерационный процесс

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n^2 - 2x_n + 2$$

сходится.

Решение. Корнями уравнения $x = \varphi(x) = x^2 - 2x + 2$ являются $\bar{x}_1 = 1$ и $\bar{x}_2 = 2$.

При $x_0 = 0$ и $x_0 = 2$ все последующие итерации равны 2, а при $x_0 = 1$ — равны 1.

При $x_0 < 0$ и $x_0 > 2$ легко видеть, что $x_n \to \infty$, когда $n \to \infty$ (т.е. процесс расходится).

При $1 < x_0 < 2$ имеем $x_n \to 1$, поскольку для любого x из этого интервала выполнено неравенство $x^2 - 2x + 2 < x$.

При $0 < x_0 < 1$ первая же итерация x_1 попадает в интервал $(1, 2)$, поскольку для любого $0 < x < 1$ выполнено неравенство $x^2 - 2x + 2 < 2$; следовательно, и в этом случае имеем $x_n \to 1$.

Таким образом, область сходимости рассматриваемого итерационного процесса есть отрезок $[0, 2]$; корень $\bar{x}_2 = 2$ — точка отталкивания, а корень $\bar{x}_1 = 1$ — точка притяжения.

Если использовать достаточный признак сходимости $|\varphi'(x)| = |2x - 2| < 1$, то получим интервал сходимости $1/2 < x_0 < 3/2$, что не дает полного решения задачи.

Поскольку $\varphi'(\bar{x}_1) = 2\bar{x}_1 - 2 = 0$, то в окрестности этого корня имеет место квадратичная скорость сходимости.

Для решения задачи удобно использовать геометрическую интерпретацию метода простой итерации.

25. Дано уравнение

$$x = \varphi(x) = \frac{\pi}{2}\sin x,$$

которое решается методом простой итерации $x_n = \varphi(x_n)$. Найти область сходимости к корням уравнения.

Решение. Корнями уравнения являются $\bar{x}_1 = -\pi/2$, $\bar{x}_2 = 0$ и $\bar{x}_3 = \pi/2$.

При $x_0 = -\pi/2$ и $x_0 = \pi/2$ все последующие итерации равны $\pi/2$, а при $x_0 = 0$ — равны 0.

На интервалах $(-\pi/2, 0)$ и $(0, \pi/2)$ выполнены неравенства

$$\left|\frac{\pi}{2}\sin x\right| > x;$$

поэтому при начальных приближениях x_0, принадлежащих этим интервалам, имеет место сходимость соответственно к $\bar{x}_1 = -\pi/2$ и $\bar{x}_3 = \pi/2$.

Если x_0 взять вне этих интервалов, то первая же итерация либо приведет в точку 0, либо в один из этих интервалов; корни $\bar{x}_1 = -\pi/2$ и $\bar{x}_3 = \pi/2$ — точки притяжения, а корень $\bar{x}_2 = 0$ — точка отталкивания.

Заметим, что достаточный признак сходимости дает более узкую область сходимости:

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{\pi}{2}\cos x\right| < 1.$$

Поскольку $\varphi'(\bar{x}_1) = \varphi'(\bar{x}_3) = 0$, то в окрестностях этих корней имеет место квадратичная скорость сходимости.

Для решения задачи удобно использовать геометрическую интерпретацию метода простой итерации.

26. Определить скорость сходимости метода Ньютона к корням уравнения

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0.$$

Решение. Имеем

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-2)(x-1)^2 = 0.$$

Поскольку $\bar{x} = 2$ — простой корень, то в его окрестности сходимость квадратичная (см. задачу 6). Корень $\bar{x} = 1$ имеет кратность, равную 2; следовательно, в его окрестности имеет место линейная сходимость со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем 1/2 (см. задачу 7).

27. Для вычисления $x = \sqrt{2}$ используется итерационный процесс

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n + \nu\left(x^2 - 2\right).$$

При каком выборе ν этот процесс имеет квадратичную скорость сходимости?

Решение. Задача будет решена, если выбор ν приведет к тому, что будет выполнено $\varphi'(\sqrt{2}) = 0$. Последнее будет иметь место, если определить ν из уравнения

$$\varphi'(x) = 1 + \nu 2x = 0, \quad \nu = -\frac{1}{2x}.$$

Легко видеть, что при таком выборе ν исходный процесс превращается в метод Ньютона для вычисления $\sqrt{2}$.

28. Построить метод простой итерации для решения уравнения

$$\cos x - \frac{1}{x}\sin x = 0,$$

сходящийся при любом начальном приближении $x_0 \neq 0$.

Решение. Эквивалентное уравнение имеет вид

$$x = \operatorname{tg} x.$$

Метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n) = \operatorname{tg} x_n$ для его решения применить нельзя, поскольку нарушено достаточное условие сходимости:

$$\varphi'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \geq 1.$$

Перейдем к обратной функции и получим другое эквивалентное уравнение

$$x = \operatorname{arctg} x,$$

для которого метод простой итерации $x_{n+1} = \varphi(x_n) = \operatorname{arctg} x_n$ сходится в силу достаточного признака, поскольку

$$\varphi'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} < 1, \quad x \neq 0.$$

29. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a, b]$ корень $\bar{x}$ неизвестной заранее кратности $p > 1$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Построить модификацию метода Ньютона, имеющую квадратичную скорость сходимости.

Решение. Поскольку уравнение $f'(x) = 0$ имеет тот же корень $\bar{x}$, но кратности $p-1$, то для уравнения

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = 0, \quad g'(x) = 1 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

корень $\bar{x}$ будет уже простым. Применив к этому уравнению метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

и подставив сюда выражение $g(x)$ через $f(x)$, получим итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)},$$

который имеет квадратичную скорость сходимости.

30. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a,b]$ корень $\bar{x}$ кратности $p \geq 2$, причем $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция. Для метода секущих в случае простого корня скорость сходимости определяется соотношением

$$x_{n+1} - \bar{x} = \left(\frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right)^{1/m} (x_n - \bar{x})^m,$$

где $m \approx 1.618$ (см. задачу 11). Однако в данном случае в константе асимптотической ошибки содержится неопределенность “нуль на нуль”, если $p > 2$, или деление на нуль, если $p = 2$. Модифицировать метод секущих так, чтобы скорость сходимости сохранилась.

Решение. Поскольку уравнение $f'(x) = 0$ имеет тот же корень $\bar{x}$, но кратности $p-1$, то для уравнения

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

корень $\bar{x}$ будет уже простым. Применив к этому уравнению метод секущих

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{g(x_n) - g(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}g(x_n) - x_n g(x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})}$$

и подставив сюда выражение $g(x)$ через $f(x)$, получим итерационный процесс

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n)f'(x_{n-1}) - x_n f(x_{n-1})f'(x_n))}{f(x_n)f'(x_{n-1}) - f(x_{n-1})f'(x_n))}$$

с тем же порядком сходимости, что и для случая простого корня.

31. Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a,\, b]$ простой корень $\bar{x}$, причем $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_1\omega_1(x_n) - \alpha_2\omega_2(x_n),$$

где

$$\omega_1(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \omega_2(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n + \beta\omega_1(x_n))}, \quad \beta \neq 0.$$

Найти такие значения α_1 и α_2, чтобы при любом $\beta \neq 0$ этот процесс имел третий порядок сходимости.

Решение. Положим $\varepsilon_n = x_n - \bar{x}$ и представим $x_n = \bar{x} + \varepsilon_n$. Тогда (см. задачу 22)

$$\omega_1(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f(\bar{x}+\varepsilon_n)}{f'(\bar{x}+\varepsilon_n)} = \varepsilon_n - \frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\,\varepsilon_n^2 + O\left(\varepsilon_n^3\right).$$

Аналогично получим

$$\omega_2(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(x_n + \beta\omega_1(x_n))} = \frac{f(\bar{x} + \varepsilon_n)}{f'(\bar{x} + \varepsilon_n + \beta\omega_1(\bar{x} + \varepsilon_n))} = \varepsilon_n + \frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}(1 - 2(1+\beta))\,\varepsilon_n^2 + O\left(\varepsilon_n^3\right).$$

Теперь вычтем $\bar{x}$ из обеих частей формулы рассматриваемого итерационного процесса и подставим выписанные разложения. Тогда получим следующее уравнение ошибки:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - (\alpha_1 + \alpha_2)\,\varepsilon_n - (\alpha_1 + \alpha_2(1+2\beta))\,\frac{1}{2}\,\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\,\varepsilon_n^2 + O\left(\varepsilon_n^3\right).$$

Для того чтобы этот процесс имел третий порядок сходимости, необходимо подобрать такие α_1 и α_2, что коэффициенты при ε_n и ε_n^2 были равны нулю:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ &\alpha_1 + \alpha_2(1-\beta) = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим

$$\alpha_1 = \frac{1+2\beta}{2\beta}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2\beta}.$$